

Bestemmelse av tyngdens akselerasjon med fysisk pendel*

Troels Arnfred Bojesen
Institutt for fysikk, NTNU, NO-7491 Trondheim

19. oktober 2011

Sammendrag

En enkel og relativt presis metode til å finne tyngdeakselerasjonen, baserer seg på å måle en frittssvingende fysisk pendels svingeperiode når avstanden mellom opphengspunktet og massesenteret er lik treghetsradien. Basert på et oppsett med en en meter lang, rektangulær pendel, ble tyngdeakselerasjonen funnet til å være $g = (9,8362 \pm 0,0002) \text{ m s}^{-2}$. Denne verdien er, til tross for den forenklete teorien og det enkle utstyret som ble brukt, bare 1,5 ‰ for stor i forhold til den beste kjente verdien for g på stedet.

1 Innledning

Pendelen har, siden Galileo oppdaget dens omtrentlige isokroni og Newton formulerte sin mekanikk, vært et hjelpemiddel i målingen av tyngdeakselerasjonen[1]. I nyere tid har riktignok direkte målinger av fallende legemer i vakuum, utført med laserinterferometer og atomur, forbigått pendelforskene i presisjon. For eksempel utførte Rothleitner med fler i 2008 målinger av tyngdeakselerasjonen med en absolutt feil på bare $6 \cdot 10^{-9} \text{ m s}^{-2}$ [2], hvilket er flere størrelsesordner bedre enn de beste pendelbaserte målingene[3]. De nye metodene krever dog dyrt og komplisert utstyr, noe som gjør pendelbaserte målinger å foretrekke i en pedagogisk øvelse.

I denne rapporten beskrives en klassisk bestemmelse av tyngdeakselerasjonen ved hjelp av en frittssvingende fysisk pendel, der den eneste moderniseringen av apparaturen ligger i automatisering og digitalisering av dataavlesning, -lagring og -behandling. Først gis det en kort beskrivelse av teorien som ligger til grunn, deretter forklares metoden og apparaturen. Resultat, feilestimat og diskusjon følger, før rapporten avsluttes med en oppsummering og en konklusjon.

*Eksempelrapport til laboratoriekurset i FY1001 og TFY4145 Mekanisk fysikk.

2 Teori

Vi ønsker å finne sammenhengen mellom en pendels periode T og tyngdeakselerasjonen g .

Gitt en fysisk pendel med masse m og treghetsmoment I om et opphengningspunkt O , og anta at denne pendelen plasseres i et konstant og homogent tyngdefelt. Vi lar h angi avstanden mellom opphengningspunktet og massesenteret CM , og lar θ angi vinkelen mellom opphengningspunktet, pendelens massesenter og likevektslinjen. Se figur 1. Pendelen forskyves en vinkel $\theta = \theta_0$ og slippes. Forutsatt at alle andre krefter enn tyngden, slik som for eksempel luftmotstand, kan neglisjeres, vil pendelens bevegelse være gitt ved differensialligningen[4]

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgh}{I} \sin\theta, \quad (1)$$

der t angir tiden. Dersom θ_0 , og dermed $\theta = \theta(t)$, gjøres tilstrekkelig liten ($\theta \ll 1$), kan vi bruke approksimasjonen

$$\sin\theta \approx \theta, \quad (2)$$

og (1) forenkles til

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgh}{I} \theta, \quad (3)$$

som beskriver en harmonisk svingning med periode

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}. \quad (4)$$

Denne ligningen kan løses for g ,

$$g = \frac{4\pi^2 I}{T^2 m h}, \quad (5)$$

og vi har et uttrykk for tyngdeakselerasjonen gitt ved målbare størrelser.

I dette forsøket har vi benyttet oss av en rektangulær pendel med lengde l , bredde b og en, innenfor måleusikkerheten, uniform tykkelse og massetetthet. Treghetsmomentet om opphengingspunktet for en slik pendel er gitt ved[5]

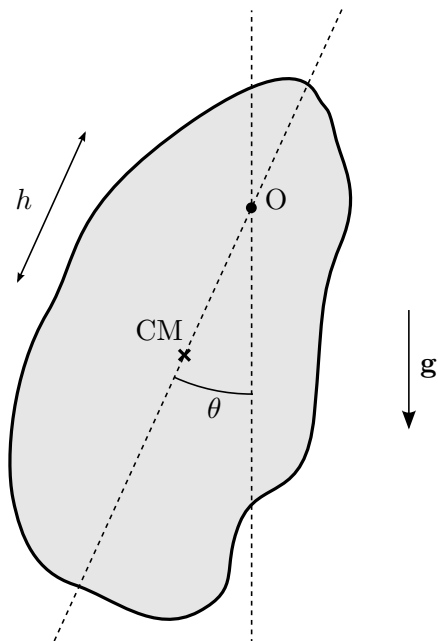
$$I = m(r^2 + h^2), \quad (6)$$

der

$$r \equiv \sqrt{\frac{l^2 + b^2}{12}} \quad (7)$$

er treghetsradien. (6) innsatt i (5) gir

$$g = \frac{4\pi^2 (r^2 + h^2)}{T^2 h}. \quad (8)$$



Figur 1: Skisse av en fysisk pendel med opphengspunkt O, massesenter CM, avstand mellom opphengspunkt og massesenter h og utsving fra likevekt θ . g er tyngdeakselerasjonen. Pendelen svinger i papirplanet.

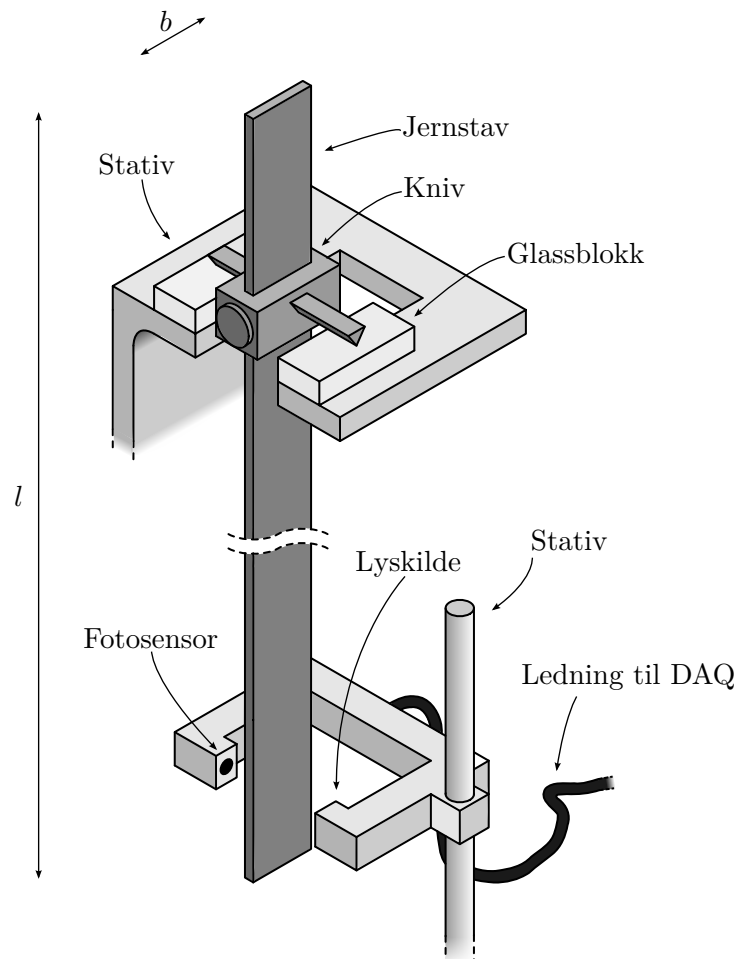
(8) inneholder en størrelse vi ønsker å måle, T , en størrelse som er gitt ved pendels fysiske utforming, r , og en størrelse som vi i dette forsøket har hatt en mulighet for å regulere, h . Vi ønsker å velge h slik at dens bidrag til feilen i g , Δg , minimeres. Fra Gauss' feilforplantningslov ser vi at dette gjøres ved å minimere $\left| \frac{\partial g}{\partial h} \right|$ med hensyn på h . Dette oppnås ved å velge $h = r$; da forsvinner leddet helt. Med andre ord blir Δg , til ledende orden, uavhengig av (en liten) Δh når $h = r$. Ligning (8) forenkles da til

$$g = \frac{8\pi^2 r}{T^2}, \quad (9)$$

som er det uttrykket vi vil bruke i vår bestemmelse av tyngdeakselerasjonen.

3 Metode

Figur 2 viser en skisse av forsøksoppstillingen som ble brukt. Til en rektangulær jernstav ble det fastspent en kniv bestående av en metallstrømpe med et par skarpe metallkanter fastsveist på hver side. Jernstaven og opphengsordningen utgjorde til sammen pendelen i forsøket, skjønt opphengsordningens treghetsmoment ble antatt neglisjerbart i de videre utregningene. Pendelen ble plassert slik at metallkantene hvilte på et par glassplater; sammen dannet metallkantene og glassplatene en svingeakse med minimal



Figur 2: Skisse av forsøksoppstillingen. Det analoge signalet fra fotosensoren sendes til en DAQ (*Data Acquisition device*), som digitaliserer det og sender det videre til en datamaskin for behandling.

kontaktflate og friksjon. Glassplatene ble i sin tur holdt oppe av et vibrasjonsdempet stativ, slik at hele pendelen kunne svinge fritt og mest mulig upåvirket av omgivelsene.

Svingeperioden ble målt ved å la pendelen periodevis bryte en lysstråle som ble sendt på tvers av svingeplanet mot en fotodiode: Variasjonen i strømmen gjennom fotodioden ble omgjort til en spenningsvariasjon over en motstand, som igjen ble omgjort til et digitalt signal, som ble sendt til en datamaskin. Ved hjelp av dette signalet og datamaskinens innebygde klokke, kunne perioden til en enkelt svingning bestemmes med en nøyaktighet som var begrenset av loggefrequensen.

Ved igangsettelsen ble pendelens utsvingsamplitude forsøkt gjort så liten som mulig, slik at approksimasjonen (2) skulle være god.

Da målingene av pendeldimensjonene, som skulle gi parameteren r i (9), ble gjort med rimelig stor nøyaktighet (se Resultater og diskusjon nedenfor), var det ønskelig å oppnå en større presisjon i målingen av perioden enn det man kunne oppnå ved måling av en enkeltperiode. Derfor ble det foretatt en serie av periodemålinger, slik at usikkerhetsintervallet kunne innskrenkes ved bruk av standard statistisk regning. Måling og registrering av data ble gjort automatisk ved hjelp av datamaskinen.

4 Resultat og diskusjon

Pendellengden ble funnet til å være

$$l = (1000,264 \pm 0,016) \text{ mm}, \quad (10)$$

mens bredden var

$$b = (24,95 \pm 0,05) \text{ mm}. \quad (11)$$

Bredden ble målt flere steder på pendelen for å forsikre at den var konstant. Resultatene (10) og (11) gir da en treghetsradius (7) på

$$r = (288,841 \pm 0,005) \text{ mm} \quad (12)$$

hvor vi har anvendt Gauss' feilforplantningslov for å finne Δr .

Da (9) inneholder kvadratet av svingeperioden T , mens den bare avhenger lineært av treghetsradien r , burde T bestemmes med dobbelt så stor relativ nøyaktighet som r , for å ha like mye å si i feilforplantningen. (12) viser at $\Delta r/r = \mathcal{O}(10^{-5})$. Loggefrekvensen av pendelsvingningene var 50 kHz, noe som betyr at en nedre grense av $\Delta T/T$ var av samme størrelsesorden. I realiteten var nøyaktigheten i periodemålingene signifikant dårligere; perioden måtte derfor finnes statistisk ut i fra en lang måleserie.

Det ble målt til sammen 400 perioder, vist kronologisk i figur 3. Verdiene viser ingen store tegn til drifting eller anomalier, noe som øker deres troverdighet. Den statistiske analysen av dataene gav resultatet

$$T = (1,522\,688\,7 \pm 0,000\,007\,2) \text{ s}, \quad (13)$$

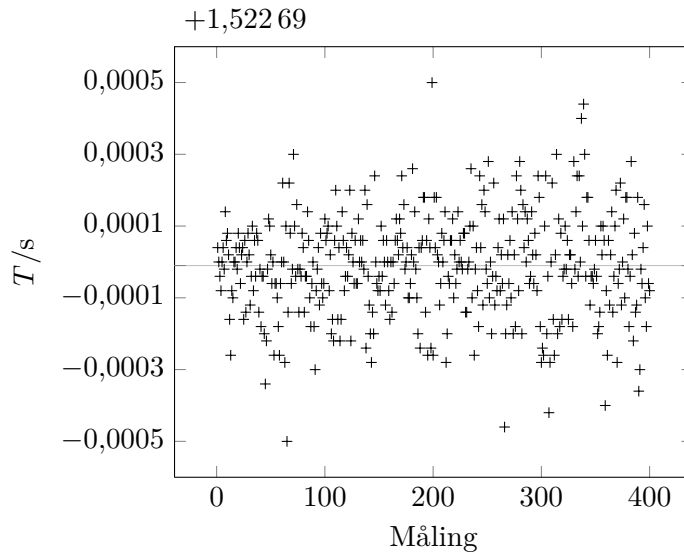
der feilen, ΔT , er standardfeilen. Sammen med resultatet (12) får vi da, ved bruk av (9) og Gauss' feilforplantningslov, det endelige resultatet

$$g = (9,8362 \pm 0,0002) \text{ m s}^{-2}. \quad (14)$$

I 1971 målte Statens kartverk tyngdeakselerasjonen i kjelleren på Gamle Fysikk¹ til å være[5]

$$g = (9,821\,467\,5 \pm 0,000\,000\,4) \text{ m s}^{-2}. \quad (15)$$

¹NTNU, Trondheim.



Figur 3: Periodemålingene i kronologisk rekkefølge. Nullpunktlinjen på T -aksen indikerer middelverdien på 1,522 69 s.

Man må anta at den samme tyngdeakselerasjonen i 3. etasje i Realfagsbygget² er nær denne verdien, og i alle fall ikke større, siden 3. etasje i Realfagsbygget ligger høyere enn kjelleren i Gamle Fysikk.³ (14) ser altså ut til å inneholde systematiske feil av samlet størrelsesorden 1‰.

Flere systematiske feil kan ha bidratt til dette avviket: For det første er den teoretiske modellen som har blitt lagt til grunn i forsøket, for enkel. Mest åpenbart er det at det treghetsmomentet vi har regnet med i (6), for lite, siden vi neglisjerte treghetsmomentet til opphengsanordningen. (9) gir derfor et *for lite* resultat, men et raskt overslag viser at denne feilen er av størrelsesorden 10^{-6} og altså ubetydelig.

Vår approksimasjon i ligning (2) resulterer også i en feil. Hvis man ikke innfører denne approksimasjonen, men tar utgangspunkt i den originale ligningen (1), viser det seg at perioden ikke er helt uavhengig amplituden θ_0 , men gitt ved^[4]

$$T_{\text{korrigeret}} = T \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \mathcal{O} \left[\sin^4 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right] \right\}. \quad (16)$$

Hvis vi anslår at $\theta_0 \approx 0.06$ og bruker $T_{\text{korrigeret}}$ i (9) i stedet for T , nedjusteres resultatet (14) med omtrent 0.5‰, noe som kan forklare en del av avviket fra (15).

²NTNU, Trondheim; her ble forsøket utført.

³Hvis man antar at forsøksoppstillingen i Realfagsbygget lå 10 m over oppstillingen i kjelleren i Gamle Fysikk, og forøvrig regner jorden som en homogen, punktformig masse, viser et raskt overslag at vi må nedjustere (15) til omtrent $g = 9,821\,438 \text{ m s}^{-2}$ hvis vi skal sammenligne direkte, hvilket dog ikke endrer konklusjonen.

En fylldig liste av ytterligere systematiske korreksjoner av modellen som kan gjøres, er presentert i referanse [6]. Vi vil ikke gå nærmere inn på dem her.

Videre er det andre feilkilder som ikke har med den teoretiske modelleringen å gjøre. Dårlig kalibrert eller slitt utstyr, slik som feil lengdebestemmelse av pendelen,⁴ feil i dataloggingen, eller en for rask eller treg datamaskinklokke, er alle mulige feilkilder. Det er dog ikke mulig å sette fingeren på den ene eller den andre kandidaten uten å gjennomføre en større undersøkelse, hvilket ikke ble gjort i dette forsøket.

5 Konklusjon

Vi målte tyngdeakselerasjonen til $g = (9,8362 \pm 0,0002) \text{ m s}^{-2}$, hvilket er en omtrent 1,5‰ for høy verdi i forhold forventet verdi. Grunnen til dette avviket er ikke fullt ut kjent, men skyldes trolig i stor grad en overforenklet teoretisk modellering av systemet. Unøyaktigheter i kalibreringen av utstyret har nok også spilt en rolle.

Det finnes flere muligheter for å forbedre vårt enkle oppsett:⁵ Bedre vibrasjonsdemping, plassering av pendelen i vakuum, en periodemålingsanordning som gjør det mulig å operere med mindre amplituder og en bedre pendelutformning (slik som for eksempel Katers pendel[7]), er noen slike.

Referanser

- [1] Roger G. Newton. *From Clockwork to Crapshoot: A History of Physics*. The Belknap Press of Harvard University Press, 2007.
- [2] Ch. Rothleitner, S. Svitlov, H. Mérimèche, H. Hu. og L. J. Wang. Development of new free-fall absolute gravimeters. *Metrologia*, 46(3):283, 2009.
- [3] J. E. Faller. Thirty years of progress in absolute gravimetry: a scientific capability implemented by technological advances. *Metrologia*, 39(5):425, 2002.
- [4] Hugh D. Young og Roger A. Freedman. *University Physics*. Pearson Education, Addison Wesley, 11. utgave, 2004.
- [5] Egil V. Herland, Iver B. Sperstad, Knut Gjerden, Mari H. Farstad, Troels A. Bojesen, Amund G. Gjendem og Thor B. Melø. *Laboratorium i*

⁴Lengden ble bestemt ved å sammenligne pendelen med en referansestav. Da denne sammenligningen ikke ble utført akkurat ved den temperaturen referansestaven var kalibrert, vil lengdebestemmelsen inneholde en systematisk feil.

⁵Skjønt slike forbedringer er av liten praktisk betydning i dag, da pendelen ikke lengre blir brukt i presisjonsmålinger av tyngdeakselerasjonen.

emnene *TFY4145 mekanisk fysikk*, *FY1001 mekanisk fysikk for studenter ved studieprogrammene MTFYMA, MLREAL, BFY, BKJ*. NTNU, Trondheim, 2011.

- [6] Robert A. Nelson og M. G. Olsson. The pendulum: Rich physics from a simple system. *American Journal of Physics*, 54(2):112–121, 1986.
- [7] Robert P. Multhauf og Victor Fritz Lenzen. *Development of Gravity Pendulums in the 19th Century*. Smithsonian Institution Press, 1966.