Bestemmelse av tyngdeakselerasjonen via rulling på skråplan

V. Risinggård[a]

[a] *Institutt for fysikk, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim.*

1. Eksperiment

En ring som ruller har både kinetisk energi og rotasjonsenergi, men disse er like store. Den totale kinetiske energien til ringen er derfor

$$K = 2 \cdot \tfrac{1}{2} m v^2 = m v^2. \tag{1}$$

Siden en ring som ruller langs et skråplan med helningsvinkel α har falt en avstand $h = x \sin\alpha$ i tyndefeltet når den har beveget seg en avstand x langs planet (se figur 1) gir bevaring av mekanisk energi oss ligningen

$$mgx \sin\alpha = mv^2. \tag{2}$$

Hastighetsøkningen til en ring som beveger seg en avstand x langs planet er altså

$$v = \sqrt{gx \sin\alpha}. \tag{3}$$

Det lar oss finne akselerasjonen ved å derivere og bruke kjerneregelen,

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{g \sin\alpha}{2\sqrt{gx \sin\alpha}} \cdot v = \tfrac{1}{2} g \sin\alpha. \tag{4}$$

Ved å måle akselerasjonen til en ring som ruller ned et skråplan kan vi gjøre en enkel måling av tyngdeakselerasjonen,

$$g = \frac{2a}{\sin\alpha}. \tag{5}$$

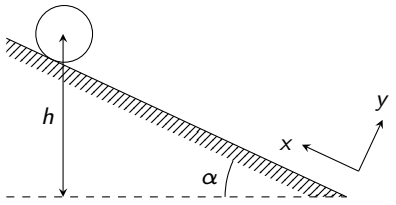
Her har vi antatt at luftmotstanden og rullefriksjonen begge er neglisjerbare over de relevante hastighets- og tidsintervallene.

2. Praktisk utførelse

Vi må bestemme helningsvinkelen til skråplanet og akselerasjonen til ringen.

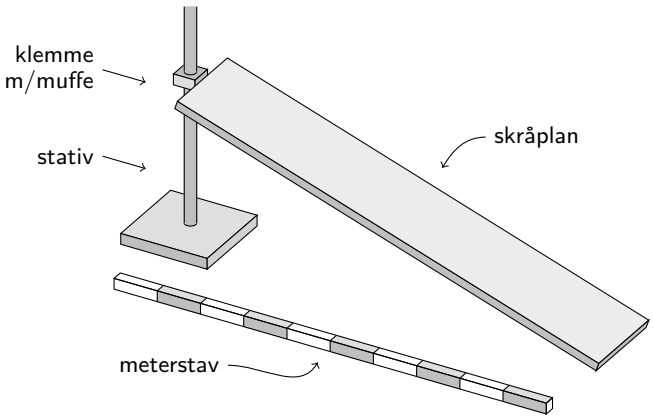
1. Utstyrsoppsettet er vist i figur 2.
2. Helningsvinkelen til skråplanet bestemmes ved å måle hypotenusen og hosliggende katet og regne ut vinkelen ved bruk av cosinus. Om vi får tid kan vi gjennomføre en kontrollmåling der vi bruker cosinussetningen, som ikke krever at trekanten er rettvinklet (se usikkerhetsanalyse).

Vi bestemmer akselerasjonen ved en vha. en tids–posisjons-graf i Tracker.



Figur 1: Ring som ruller på skråplan. Skråplanet har en helningsvinkel α. Når ringen har beveget seg en avstand x langs skråplanet vil den ha falt en avstand $h = x \sin\alpha$ i tyngdefeltet.

3. Vi tar opp minst 10 filmer av ringen som ruller på skråplanet med en bilderate på 100 fps.
4. Filmene importeres i Tracker. Her setter vi en lengdeskala ved å måle lengden på meterstaven (se oppsett i figur 2) med en Calibration Stick. Tidsenheten setter vi ved å oppgi bilderaten.
5. For hver film genererer vi en tids–posisjons-graf ved å spore ringens ferd ned skråplanet ved hjelp av funksjonen Autotracker.
6. Vi bestemmer akselerasjonen i hvert filmklipp ved å gjøre en regresjonstilpasning av en parabel mot posisjonsdataene. Akselerasjonen er gitt av andregradskoeffisienten A som $a = 2A$.
7. Settet av akselerasjoner lar oss så regne ut en gjennomsnittsakselerasjon og en standardfeil.



Figur 2: Utstyrsoppsett. Skråplan med variabel helningsvinkel konstruert vha. et stativ og et plan av tre. Meterstaven er plassert godt synlig i oppsettet for å gjøre det enkelt å skalere oppsettet i Tracker.

15. august 2017

3. Usikkerhetsanalyse

Vi baserer målingen av helningsvinkelen på å måle skråplanets hypotenus c og hosliggende katet b. Avstander langs skråplanet (hypotenusen) kan måles med en sikkerhet på omlag 1 mm. Målingen av hosliggende katet vil ha en større usikkerhet fordi vi må regne med en viss usikkerhet i endepunktet til kateten som bestemmes ved å felle ned en normal på underlaget til skråplanet. Vi regner med at usikkerheten i kateten derfor kan bli opp til 5 mm. Gitt usikkerhetene i disse lengdemålene kan vi skrive usikkerheten i vinkelen som

$$\delta\alpha = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{(c\delta b)^2 + (b\delta c)^2}{c^2 - b^2}}. \tag{6}$$

Om underlaget ikke er fullstendig horisontalt vil den målte vinkelen ikke være den korrekte helningsvinkelen til skråplanet. Dette vil være en systematisk feilkilde. Feilen kan kontrolleres ved å måle horisontalretningen med et vaterpass.

Målingen av akselerasjonen er basert på en modell som neglisjerer luftmotstand og rullefriksjon. Vi antar også at ringen har en neglisjerbar tykkelse. Eventuelle brudd på disse antakelsene vil innføre systematiske feil. Om vi ser bort fra disse feilene er usikkerheten i vår måling av tyngdeakselerasjonen gitt av usikkerheten i helningsvinkelen og usikkerheten i akselerasjonen,

$$\delta g = \frac{2}{\sin^2\alpha}\sqrt{(\sin\alpha\delta a)^2 + (a\cos\alpha\delta\alpha)^2}. \tag{7}$$

4. Numerisk modellering

Den dynamiske ligningen til systemet er

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \tfrac{1}{2} g \sin\alpha. \tag{8}$$

Dette er en andreordens ordinær differensialligning. En slik ligning kan skrives om til et sett av to førsteordens ligninger f.eks. ved å innføre funksjonen $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, noe som gir settet

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v, \tag{9a}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \tfrac{1}{2} g \sin\alpha. \tag{9b}$$

Dette settet kan løses numerisk ved hjelp av Eulers metode,

$$\boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + h\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{y}_n), \tag{10}$$

der $\boldsymbol{y}_n = (x_n, v_n)$, $\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{y}_n) = (v_n, \frac{1}{2} g \sin\alpha)$ og h er steglengden. Ved bruk av initialbetingelsene $x_0 = 0$ og $v_0 = 0$ gir dette en kvadratisk tids–posisjons-graf som kan sammenlignes med eksperimentelt oppnådde grafer.