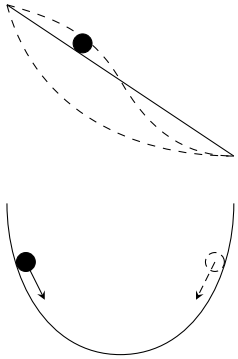
2

Rulling i en berg-og-dal-bane

Hovedoppgaven i laboratorieprosjektet i fysikk har temaet «rulling i en berg-og-dal-bane». Oppsettet dere har tilgjengelig gjør det mulig for dere å selv variere profilen til banen og objektet som ruller. Innenfor disse rammene skal dere designe et problem dere vil studere nærmere og utforske det eksperimentelt og numerisk. Eksempler på problemstillinger dere kan velge å se på er:

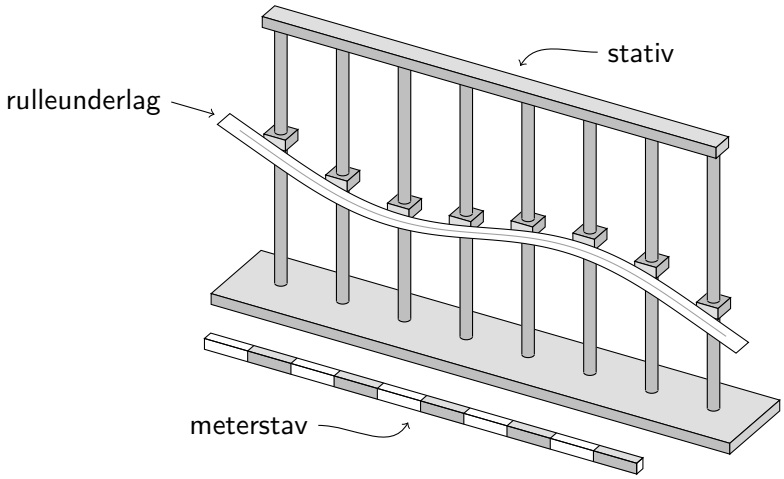


- *Rulling med ulike treghetsmomenter.* Hvilket objekt ruller raskest?
- *Raskeste vei ned.* Hvilken profil minimerer rulletiden mellom de to endepunktene til banen?
- *Dempede svingninger.* Måling av energitapsraten ved å studere oscillasjoner i en U-formet bane.
- *Rulling i en sinus-formet bane.* I hvilke punkter i banen er akselerasjonen null? Er det punkter i banen der friksjonskraften er null?

Uansett hvilken problemstilling dere velger skal Newtons andre lov for systemet løses numerisk, og dere skal gjøre en sammenligning av de eksperimentelle og numeriske resultatene. I analysen av resultatene skal dere fokusere på kreftene som virker. Dere skal beregne og plotte både normalkraft og friksjonskraft sfa. posisjonen til objektet.

Utstyrsoppsett

Sett opp berg-og-dal-banen med valgt profil. Bruk underlaget med smalt spor til bordtennisballen og stålkula og underlaget med bredt spor til ringen. Pass på at helningsvinkelen til banen er liten nok til å unngå sluring. Kameraet plasseres på gulvet med linsen vinkelrett på banens midtpunkt.



- stativ til berg-og-dal-bane
- 2 utskiftbare rulleunderlag
- meterstav
- ring, bordtennisball, stålkule, ...
- høyhastighetskamera m/stativ
- Tracker
  (på egen PC eller på delt lab-PC)

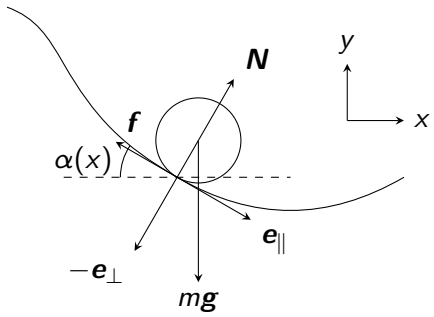
Rulling på krumt underlag

Et objekt, f.eks. en ball, ruller nedover en krum bane. Rotasjonsaksen går gjennom tyngdepunktet. Ballen har masse m, radius r og treghetsmoment I_0 mhp. rotasjonsaksen. Tyngdepunktsbevegelsen er som vanlig beskrevet av Newtons andre lov,

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}. \tag{1}$$

Rotasjonsdynamikk behandles i kap. 9 og 10, H.D. Young og R.A. Freedman: *University Physics*. Pearson Education, 14. utgave, 2016; kap. 6, J.R. Lien og G. Løvhøiden: *Generell fysikk for universiteter og høgskoler*. Bind 1, Universitetsforlaget, 2001.

Vi dekomponerer kreftene i en komponent som virker parallelt med underlaget og en komponent som virker normalt på underlaget. Tyngdekraften angriper i ballens tyngdepunkt og virker loddrett nedover. Dette gir parallellkomponenten $mg\sin\alpha(x)$ og normalkomponenten $mg\cos\alpha(x)$. Kraften fra underlaget på ballen har normalkomponenten N (normalkraften) og parallellkomponenten f (friksjonskraften). Avhengig av om ballen ruller nedover (som vist i figuren) eller oppover vil friksjonskraften virke mot eller med rulleretningen.



Siden banen er krum har tyngdepunktsakselerasjonen to komponenter – baneakselerasjonen langs underlaget og sentripetalakselerasjonen normalt på underlaget,

$$\boldsymbol{a} = \dot{v}\boldsymbol{e}_{\parallel} + \frac{v^2}{R(x)}\boldsymbol{e}_{\perp}. \tag{2}$$

Her er $R(x)$ *krumningsradien* til banen. Alt dette gir oss de to ligningene

Krumningsradien til banen behandles nærmere i neste avsnitt.

$$mg\sin\alpha(x) - f = m\dot{v}, \tag{3}$$

$$N - mg\cos\alpha(x) = \frac{mv^2}{R(x)}. \tag{4}$$

NB!
Krumningsradien er positiv når banen bøyer oppover ($\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 > 0$) og negativ når banen bøyer nedover ($\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 < 0$), jf. ligning (8).

Ligning (3) beskriver bevegelsen parallelt med underlaget. Ligning (4) gir gjennom $N \geq 0$ en betingelse som forteller oss om ballen mister kontakten med underlaget.

Newtons andre lov for rotasjon om en akse med fast orientering,

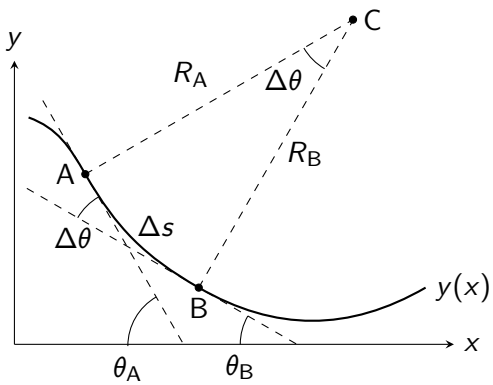
$$\tau = I_0\dot{\omega}, \tag{5}$$

gir oss et uttrykk for friksjonskraften. Det er nemlig den eneste kraften som bidrar til dreiemomentet τ, og den virker med en arm r. Dette gir $fr = I_0\dot{\omega}$. Rullebetingelsen $v = \omega r$ (dvs. $\dot{\omega} = \dot{v}/r$) lar oss dermed skrive ligning (3) som

$$\dot{v} = \frac{g\sin\alpha(x)}{1 + I_0/mr^2}. \tag{6}$$

Krumningsradius

Banen $y(x)$ i figuren har en krumning som varierer med x. Vi ønsker å finne et uttrykk for banens krumningsradius R i posisjonen merket med A. Banen fra A til B, med lengde Δs, kan oppfattes som en liten del av en sirkel, med radius $R \approx R_{\mathrm{A}} \approx R_{\mathrm{B}}$, og sentrum i C. Omløpt vinkel er da $\Delta\theta = \Delta s/R$ slik at krumningsradien blir $R = \Delta s/\Delta\theta$. Banens *krumning* er ganske enkelt den resiproke



av krumningsradien, $\kappa = 1/R = \Delta\theta/\Delta s$. Når avstanden mellom A og B er tilstrekkelig liten, kan vi erstatte differansene med differensialer,

$$R = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} \quad \text{og} \quad \kappa = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}.$$

Krumning behandles f.eks. i kap. 13, J. Hass, M.D. Weir og G.B. Thomas Jr.: *Thomas' Calculus*. Pearson Education, 13. utgave, 2014.

Da kan vi også ta i bruk Pythagoras,

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \mathrm{d}x\sqrt{1 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2}.$$

Med dette som bakgrunn kan vi evaluere krumningen ved hjelp av kjerneregelen,

$$\kappa = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2}}.$$

Fra figuren ser vi at $\tan\theta = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ slik at $\theta = \arctan(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)$. Med $u = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ er dermed

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2}{1 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2},$$

Bruk at $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\arctan u = \frac{1}{1+u^2}$.

og krumningen kan skrives som

$$\kappa = \frac{\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2}{\left(1 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2\right)^{3/2}}. \tag{7}$$

Krumningsradien er ganske enkelt

$$R = \frac{1}{\kappa} = \frac{\left(1 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2\right)^{3/2}}{\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2}. \tag{8}$$

Vi ser at mens krumningen κ alltid har en endelig verdi så lenge den deriverte til banen er kontinuerlig, kan krumningsradien R bli uendelig stor, slik den blir for en rett linje (som har andrederivert lik null, $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = 0$).

Numerikk

I tillegg til å studere det valgte systemet deres eksperimentelt skal dere også reprodusere rullebevegelsen numerisk ved å løse ligning (6) ved hjelp av Eulers metode. Det er viktig at dere i rapporten knytter numerikken opp mot eksperimentet, f.eks. ved å sammenligne eksperimentelle og numeriske tids–posisjons-grafer.

Dere finner mer informasjon om hvordan dere skal implementere Eulers metode på NumFys. Dere kan selv velge hvilket programmeringsspråk dere vil bruke i implementasjonen. Informasjon om nedlasting av Matlab eller Python finner dere på programvaresiden til laboratoriet (http://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/fyslab/software).

NumFys er en sentral ressurs for numeriske beregninger ved Institutt for fysikk (http://www.numfys.net/).

I implementasjonen av Eulers metode kommer dere til å trenge verdier for $y(x)$, $\alpha(x)$ og $R(x)$ sfa. x. Denne informasjonen skaffer dere ved å gjøre en interpolasjon mellom opphengspunktene

til banen. Fordi dette ligger litt utenfor læringsmålene til kurset har vi skrevet en ferdig funksjon dere kan bruke til dette. Koden og dokumentasjonen er tilgjengelig på hjemmesiden til laboratoriet (http://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/fyslab/oppgave.html#numerikk).