

# Varmetransport

(Y&F 17.7+39.5, L&H&L 18.1+2+4, H&S 13)

2. hovedsetning: Varme fra varmt til kaldt legeme  
(og fra varm til kald del av et legeme)

Ulike typer transport:

*Innen et legeme:*

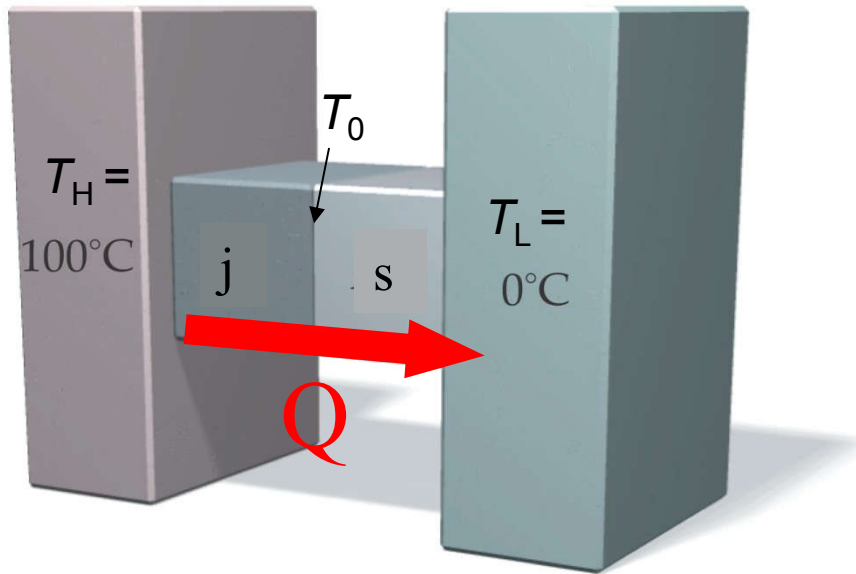
1. Varmeledning, Fouriers lov
2. Konveksjon (strømning)

*Mellom legemer:*

3. Varmeovergang (mellom ulike legemer)
4. Varmestråling, Stefan-Boltzmanns lov.

# Varmeledning, Eks. 1

∞ stort reservoar ∞ stort reservoar



$$\dot{Q} = \dot{Q}_j = \frac{A\kappa_j}{l_j}(T_H - T_0)$$

$$\dot{Q} = \dot{Q}_s = \frac{A\kappa_s}{l_s}(T_0 - T_L)$$

gir

$$\dot{Q} = \frac{T_H - T_L}{R_{\text{tot}}} = \frac{100 \text{ K}}{1,07 \text{ K/W}} = 94 \text{ W}$$

$$A = 6,0 \text{ cm}^2 = 6,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$l_j = 4,0 \text{ cm}$$

$$l_s = 6,0 \text{ cm}$$

$$\kappa_j = 80 \text{ W/(Km)}$$

$$\kappa_s = 429 \text{ W/(Km)}$$

der varmeresistans =

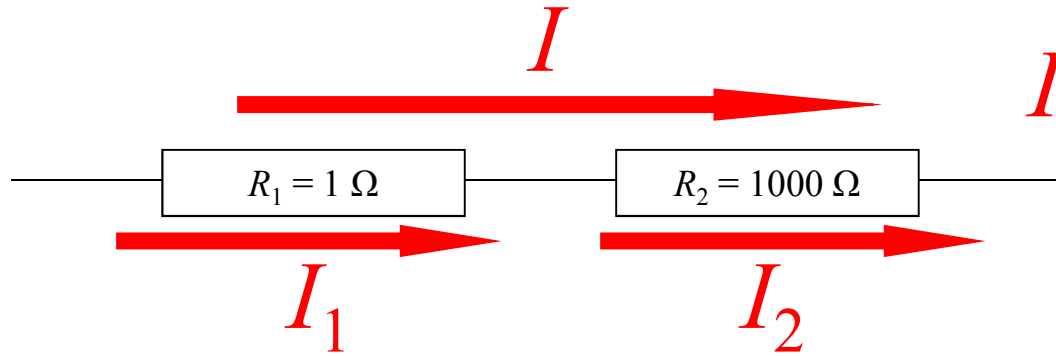
$$R_{\text{tot}} = R_j + R_s = \frac{l_j}{A\kappa_j} + \frac{l_s}{A\kappa_s} = 1,07 \text{ K/W}$$

Eksempel  
utregning:

$$R_j = \frac{l_j}{A\kappa_j} = \frac{0,04 \text{ m}}{6,0 \cdot (10^{-2} \text{ m})^2 \cdot 80 \text{ W/mK}} = 0,833 \text{ K/W}$$

# Strøm i serie

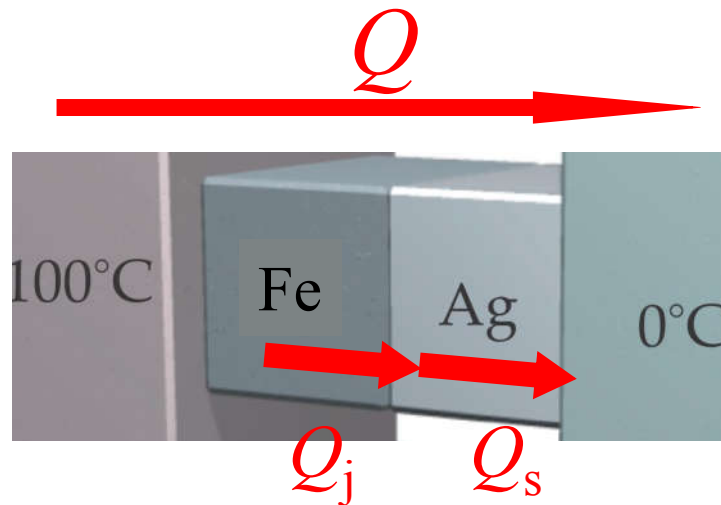
Elektrisk strøm



$$I = I_1 = I_2 !$$

Potensialfall  
 $\Delta V_i = R_i I$  ulik

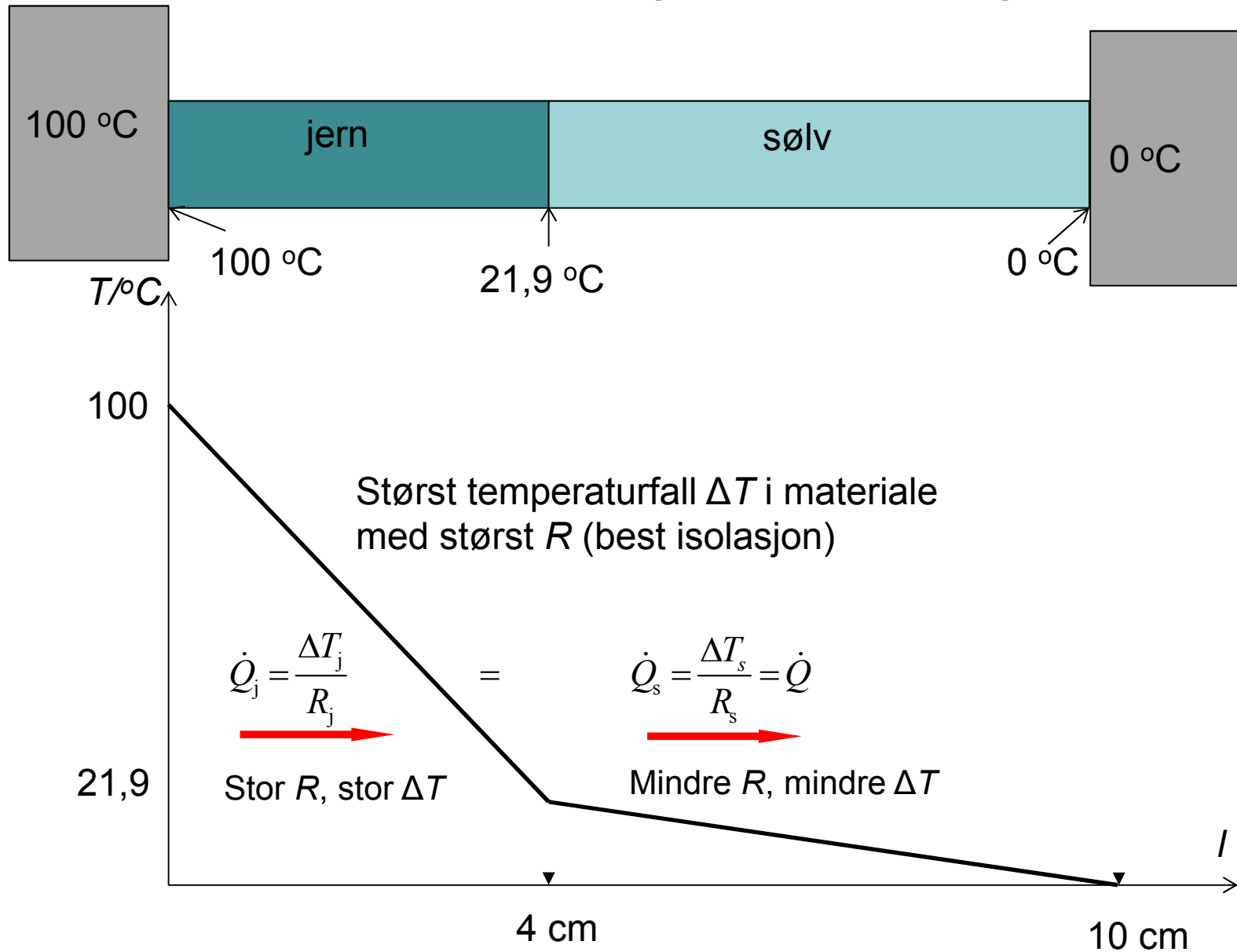
Varmestrøm



$$Q = Q_j = Q_s !$$

Temperaturfall  
 $\Delta T = R_i Q$  ulik

# Eks. 1: Temperaturforløp



Fouriers varmeledningslov,  
ulike former

$$\dot{Q} = \kappa A \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{1}{R} \Delta T$$
$$j = \frac{\dot{Q}}{A} = -\kappa \frac{dT}{dx}$$
$$\vec{j} = -\kappa \vec{\nabla} T$$

Ohms lov,  
ulike former

$$I = \sigma A \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{1}{R} \Delta V$$
$$j = \frac{I}{A} = -\sigma \frac{dV}{dx}$$
$$\vec{j} = -\sigma \vec{\nabla} V = \sigma \vec{E}$$

Strømtetthetsvektor:  $\vec{j}$

Konduktivitet:  $\kappa$  og  $\sigma$

Gradient(drivkraft):  $-\vec{\nabla} T$  og  $-\vec{\nabla} V = \vec{E}$

# Varmeresistans i Young & Freedman:

Y&F bruker resistans:  $R_{YF} = RA = \frac{l}{\kappa}$

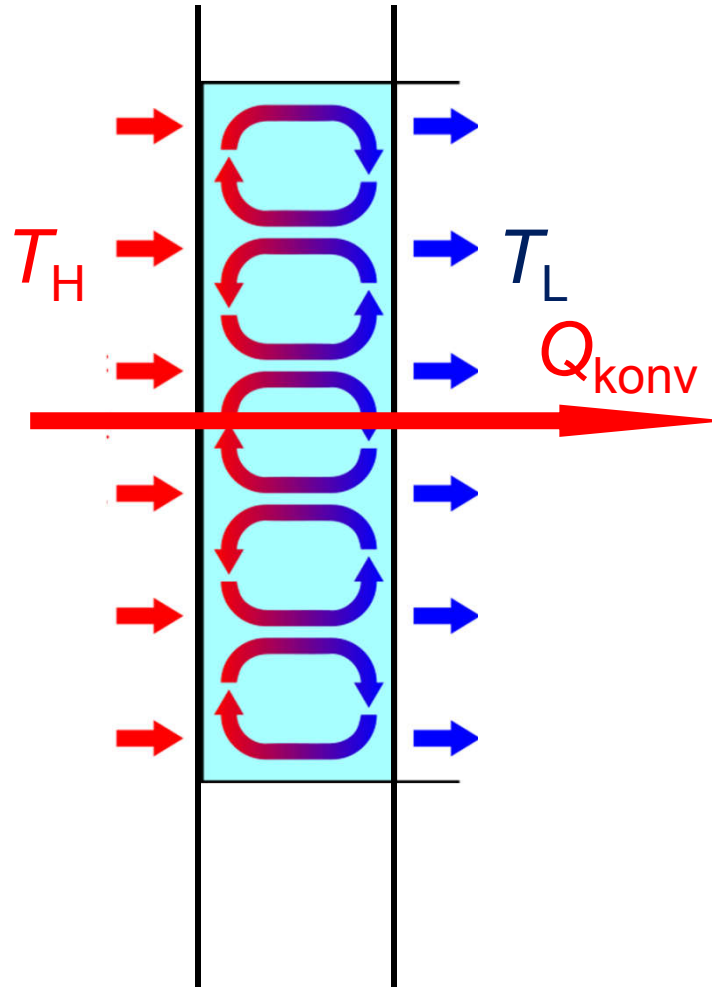
$R$  = «thermal resistance»       $R_{YF}$  = «thermal insulance»

Vi (og vanlig i fysikk):  $\dot{Q} = \frac{1}{R} \Delta T$        $j = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{1}{AR} \Delta T$

Y & F (og i byggebransjen):  $\dot{Q} = \frac{A}{R_{YF}} \Delta T$        $j = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{1}{R_{YF}} \Delta T$

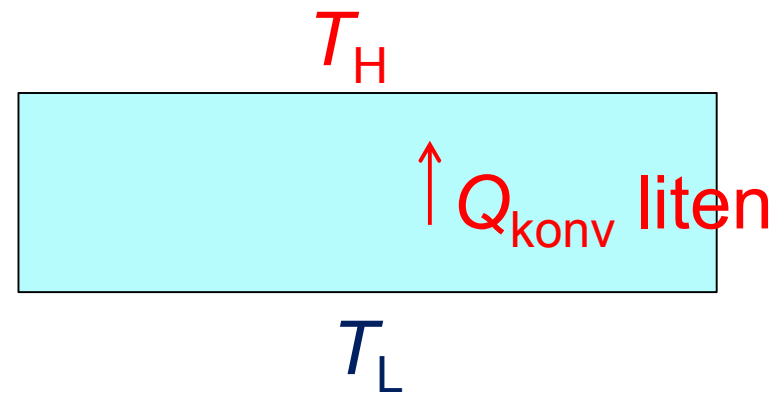
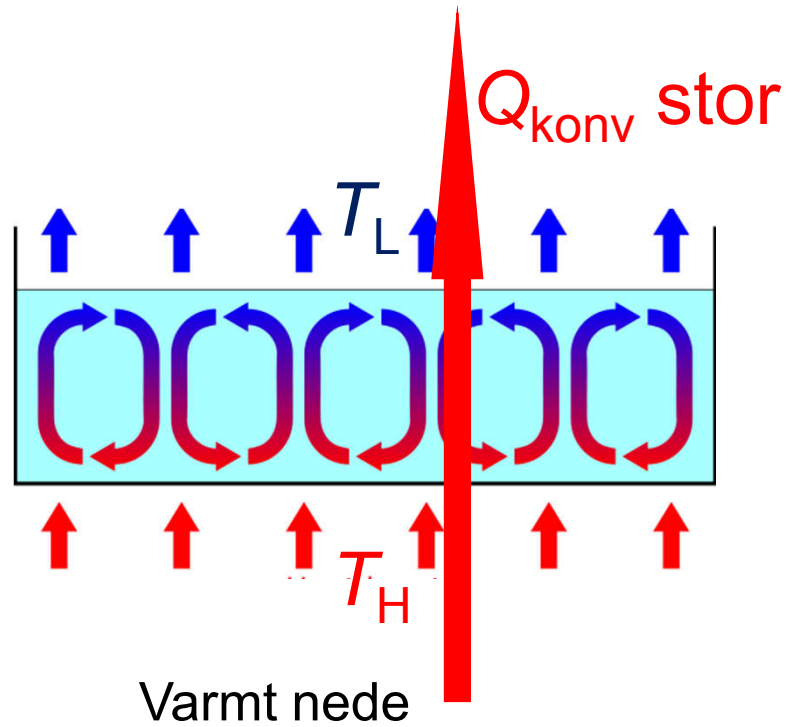
Dessuten bruker Y & F:  $H = \dot{Q}$

# Konveksjon Vertikalt skille



# Konveksjon

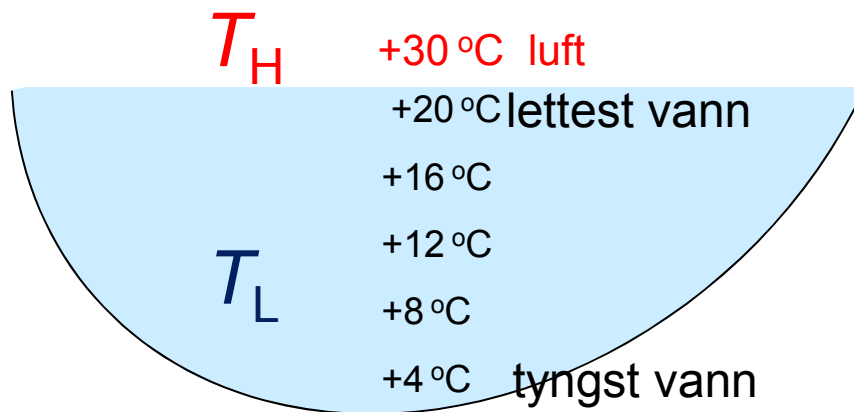
## Horisontalt skille





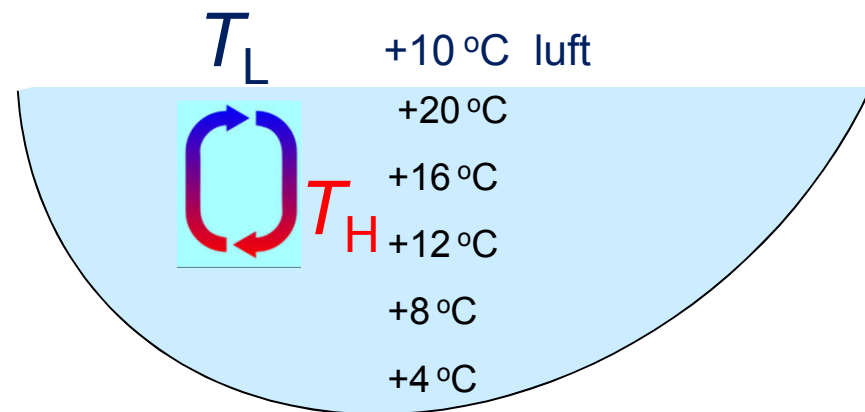
# Konveksjon i vann 4 °C til 30 °C

Innsjø en varm sommerdag:



Liten konveksjon,  
langsom oppvarming  
(bare øverste lag varmes opp)

Innsjø en kald sommerdag:



Mye konveksjon,  
effektiv avkjøling.

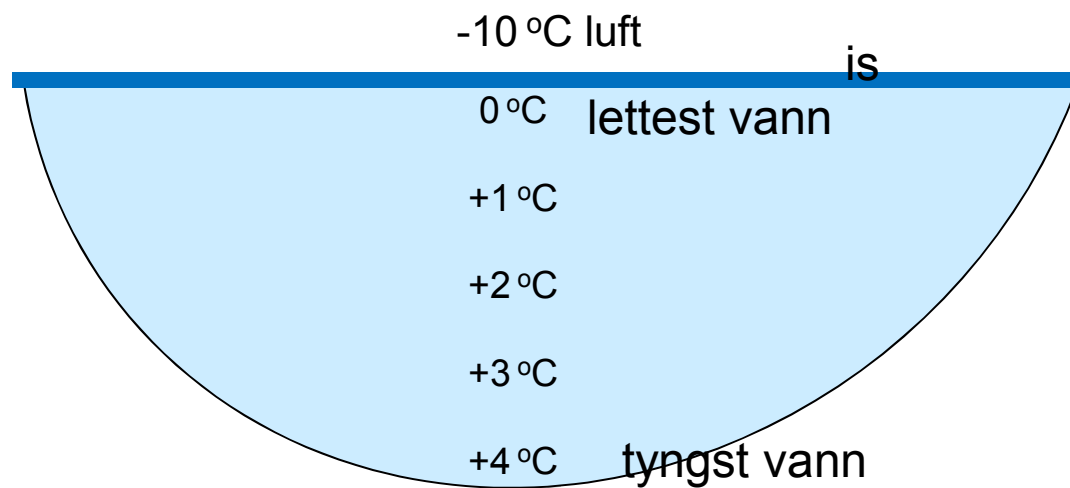
I tillegg bidrar også vind sterkt til strømning i vann

4 °C vann ligger alltid i bunnen....

# Konveksjon i vann 0 til 4 °C

Vann har størst tetthet ved + 4 °C

Innsjø om vinteren:



Ingen sirkulasjon når < 4 °C

=> minimal konveksjon, kun varmeledning

# Varmetransport

1. Varmeledning, Fouriers lov

$$\dot{Q} = \kappa A \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{1}{R} \Delta T$$

$$j = \frac{\dot{Q}}{A} = -\kappa \frac{dT}{dx}$$

$$\vec{j} = -\kappa \vec{\nabla} T$$

2. Konveksjon (strømning).

3. Varmeovergang (vegg/luft)

4. Varmestråling, Stefan-Boltzmanns lov.

Varmeledningsevne,

$$(k =) \kappa$$

$$i \quad j = \kappa \cdot \Delta T / \Delta x$$

for ulike materialer  
ved romtemp

Varmeovergangstall:

$$\alpha_{\text{ute}} = 25 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$$

$$\alpha_{\text{inne}} = 7,5 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$$

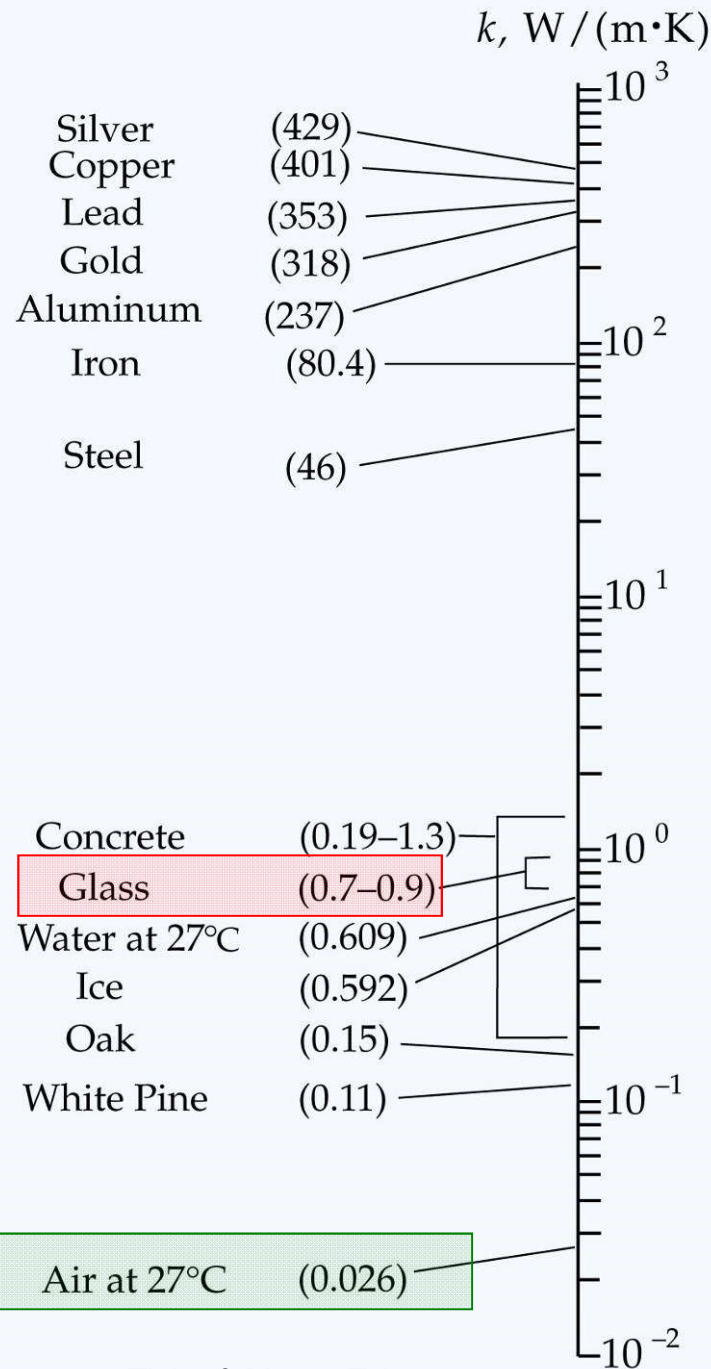
$$i \quad j = \alpha \Delta T$$

med

$$j = \frac{\dot{Q}}{A}$$

Beste isolator

Air at 27°C (0.026)

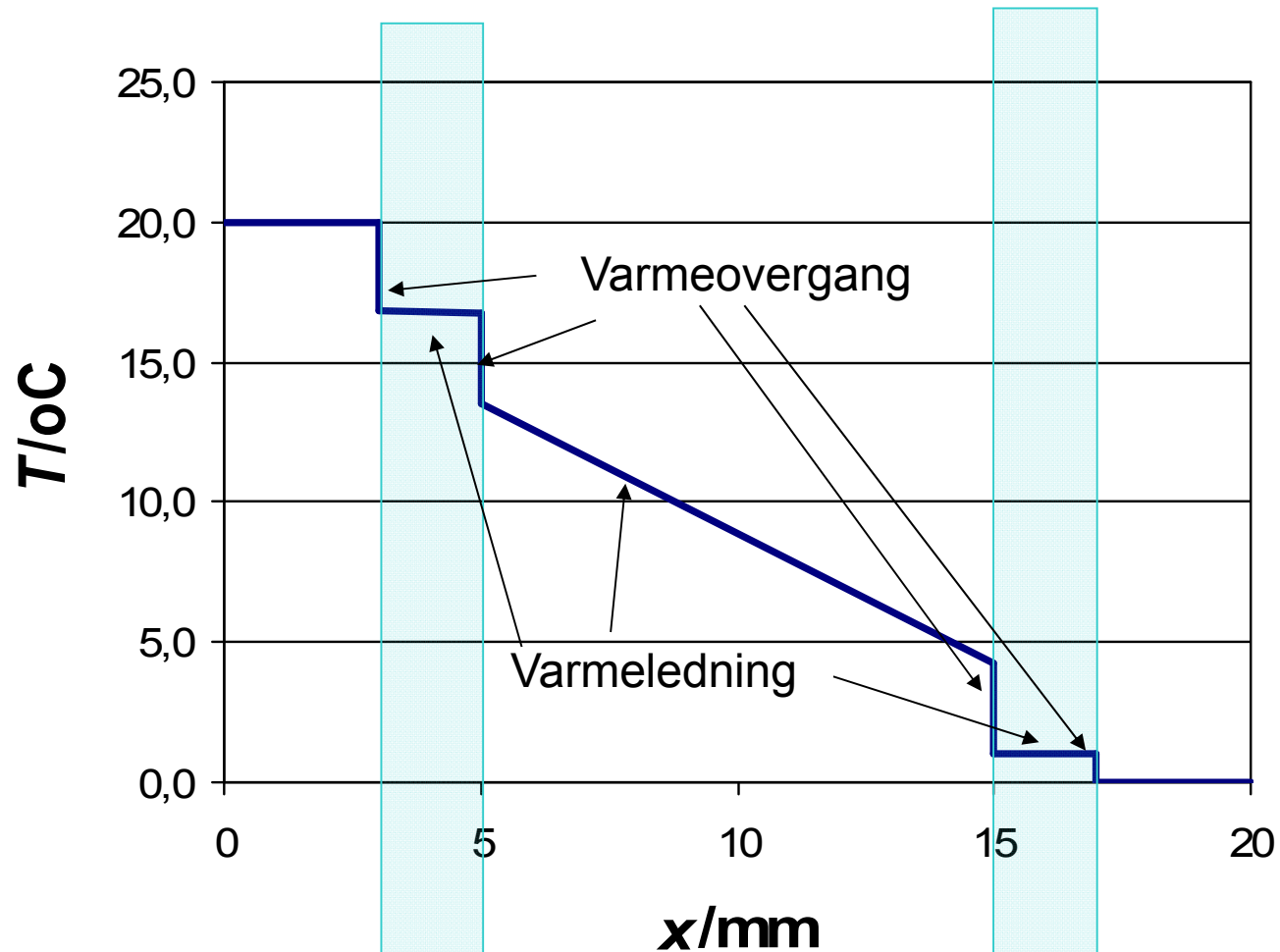


Tipler & Mosca Tab. 20-3

Table 17.5 Thermal Conductivities

Substance	$k$ (W/m·K)
<i>Metals</i>	
Aluminum	205.0
Brass	109.0
Copper	385.0
Lead	34.7
Mercury	8.3
Silver	406.0
Steel	50.2
<i>Solids (representative values)</i>	
Brick, insulating	0.15
Brick, red	0.6
Concrete	0.8
Cork	0.04
Felt	0.04
Fiberglass	0.04
Glass	0.8
Ice	1.6
Rock wool	0.04
Styrofoam	0.027
Wood	0.12-0.04
<i>Gases</i>	
Air	0.024
Argon	0.016
Helium	0.14
Hydrogen	0.14
Oxygen	0.023

## Eks. 2: Temperaturforløp dob.glassvindu



Hva hvis konveksjon mellom rutene gjør seg gjeldende?

$l_1/\kappa_1 \rightarrow R_{konv} A$ , mye mindre enn 0,385  $\Rightarrow j$  større  $\Rightarrow T_4 - T_5$  mindre

# Varmetransport

1. Varmeledning, Fouriers lov
2. Konveksjon (strømning)
3. Varmeovergang (vegg/luft)
4. Varmestråling, Stefan-Boltzmanns lov

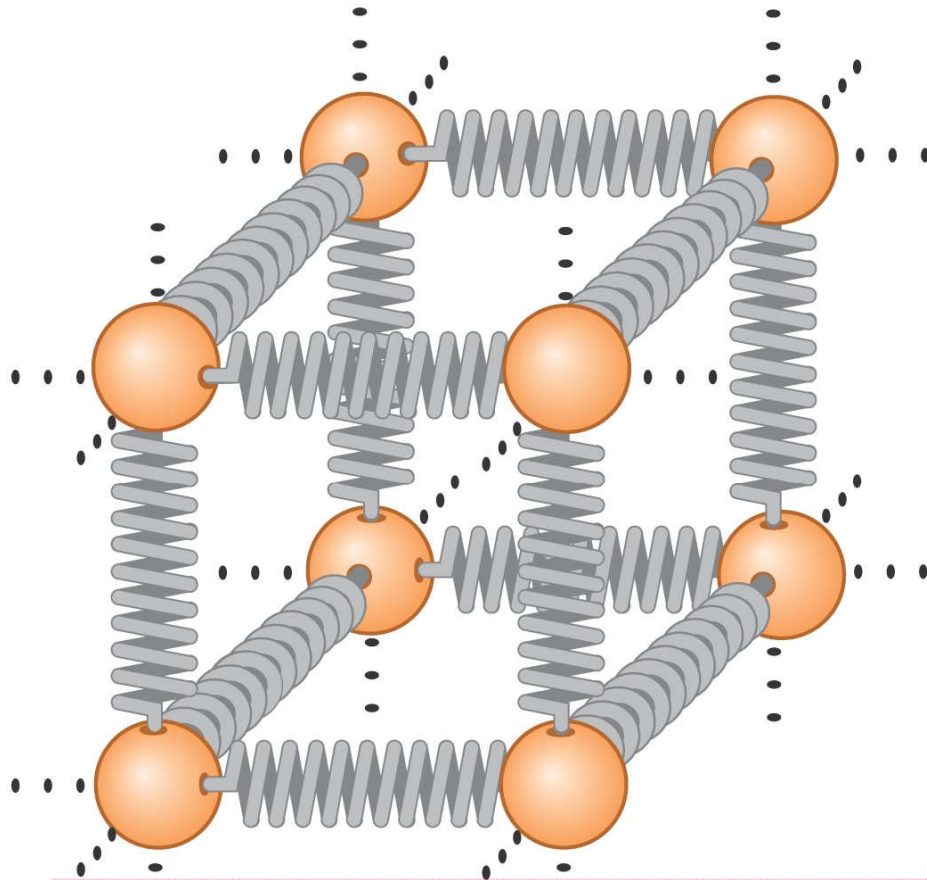
*Josef Stefan,  
eksperimenter 1879*

*Ludvig Boltzmann,  
teori 1884*

Alle legemer sender ut e.m.stråling:  
Infrarødt ved romtemp, rødt - hvitt ved  
høyere temperaturer

$$j = e \sigma T^4$$

Figure 18.20



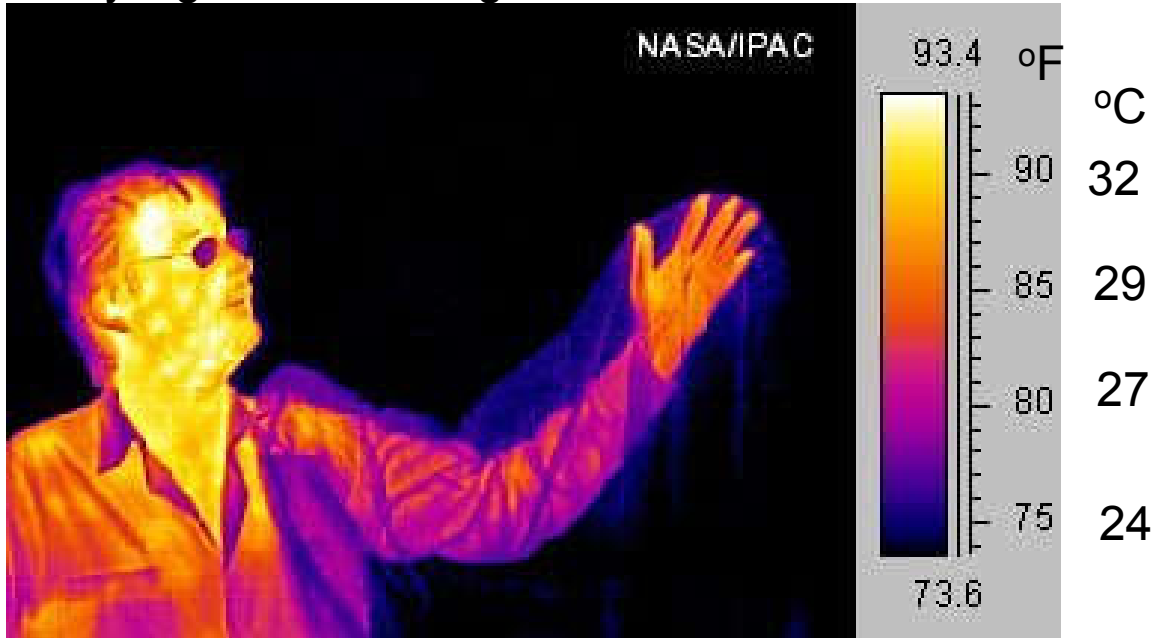
Atomer vibrerer,  
kraftigere jo høyere  
temperatur

Vibrasjon = akselerasjon

Akselererende elektroner  
sender ut ems

Alle legemer sender ut ems (elektromagnetisk stråling):  
Infrarødt ved romtemp, rødt - hvitt ved høyere temperaturer  
Årsak: termiske vibrasjoner i molekyler = akselererende elektroner.

Ikke-synlig varmestråling kan detekteres av IR-kamera



Fra: [https://en.wikipedia.org/wiki/Black-body\\_radiation](https://en.wikipedia.org/wiki/Black-body_radiation)



# Emissivitet $e$ for ulike materialer

Materiale	$e$
Omhyggelig polert gull	0,02 – 0,03
Omhyggelig polert sølv	0,02 – 0,03
Omhyggelig polert messing	0,03
Oksydert messing	0,6
Polert aluminium og –folie	0,04 – 0,06
Upolert aluminium	0,06 – 0,07
Sterkt oksydert aluminium	0,2 – 0,3
Karbon: grafitt	0,7 – 0,8
Karbon: sot på overflate	0,96
Glasert porselen	0,92
Gummi	0,85 – 0,95
Gips	0,93
Vann	0,95 – 0,96
Betong	0,85
Wolfram (glødetråd)	0,4 – 0,5

Liten

$$j = e \sigma T^4$$

Emissivitet  $e$   
 =  
 absorpsjonsevne  $a$

Stor

Fra Handbook og Physics & Chemistry:  
[www.hbcnetbase.com/](http://www.hbcnetbase.com/)

og

[www.engineeringtoolbox.com/  
 emissivity-coefficients-d\\_447.html](http://www.engineeringtoolbox.com/emissivity-coefficients-d_447.html)

# Eks. 3 Termisk stråling fra sola

$$j_{\text{sol}} = e\sigma T_{\text{sol}}^4$$

$$= 1,567 \cdot 10^{-8} (5778)^4 \text{ W/m}^2 = 63,2 \text{ MW/m}^2$$

$j_{\text{sol}}$  i alle retninger => total effekt:

$$P_{\text{sol}} = j_{\text{sol}} 4\pi R_{\text{sol}}^2 = 3,85 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

$$j_{\text{inn,jord}} = P_{\text{sol}} / 4\pi R_{\text{sj}}^2 = 1,37 \text{ kW/m}^2$$

Andel  $r = 0,306$  reflekteres i atm.:

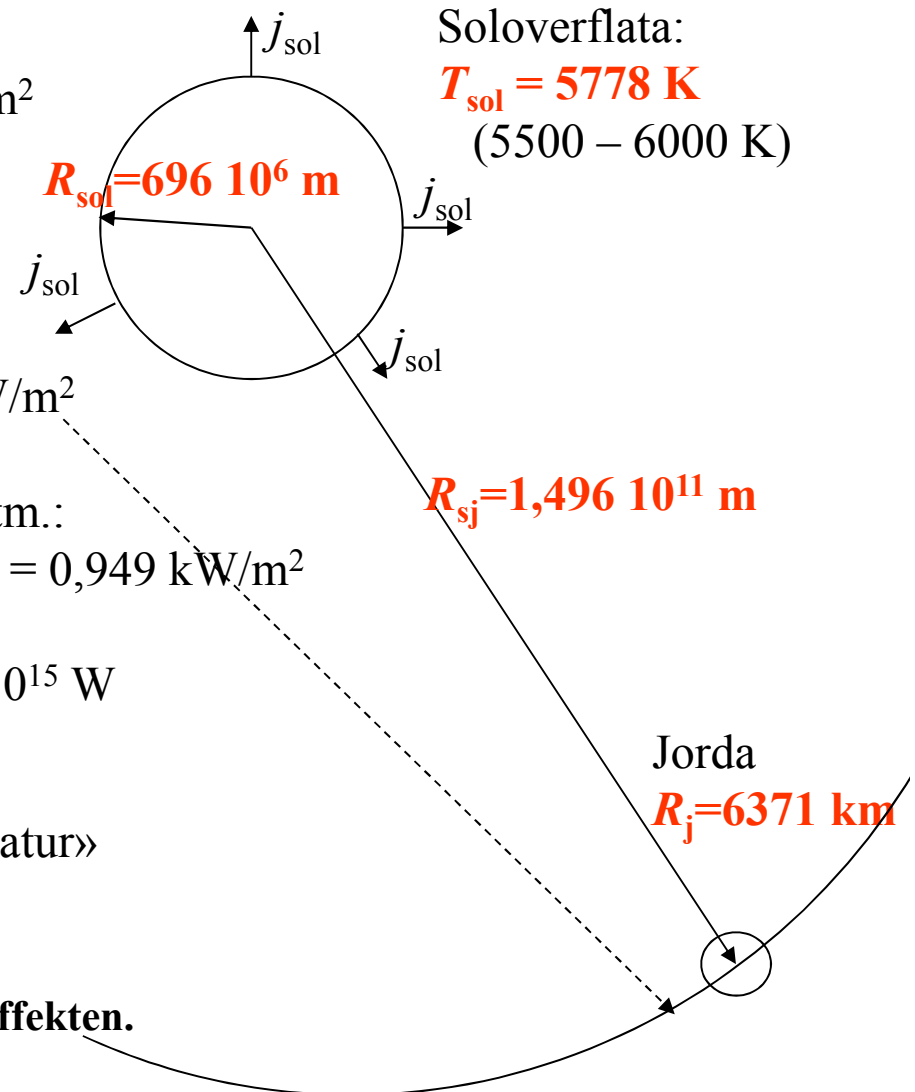
$$j_{\text{jordoverflate}} = (1-r) \cdot 1,37 \text{ kW/m}^2 = 0,949 \text{ kW/m}^2$$

$$P_{\text{inn}} = j_{\text{jordoverflate}} \cdot \pi R_{\text{j}}^2 = 121 \cdot 10^{15} \text{ W}$$

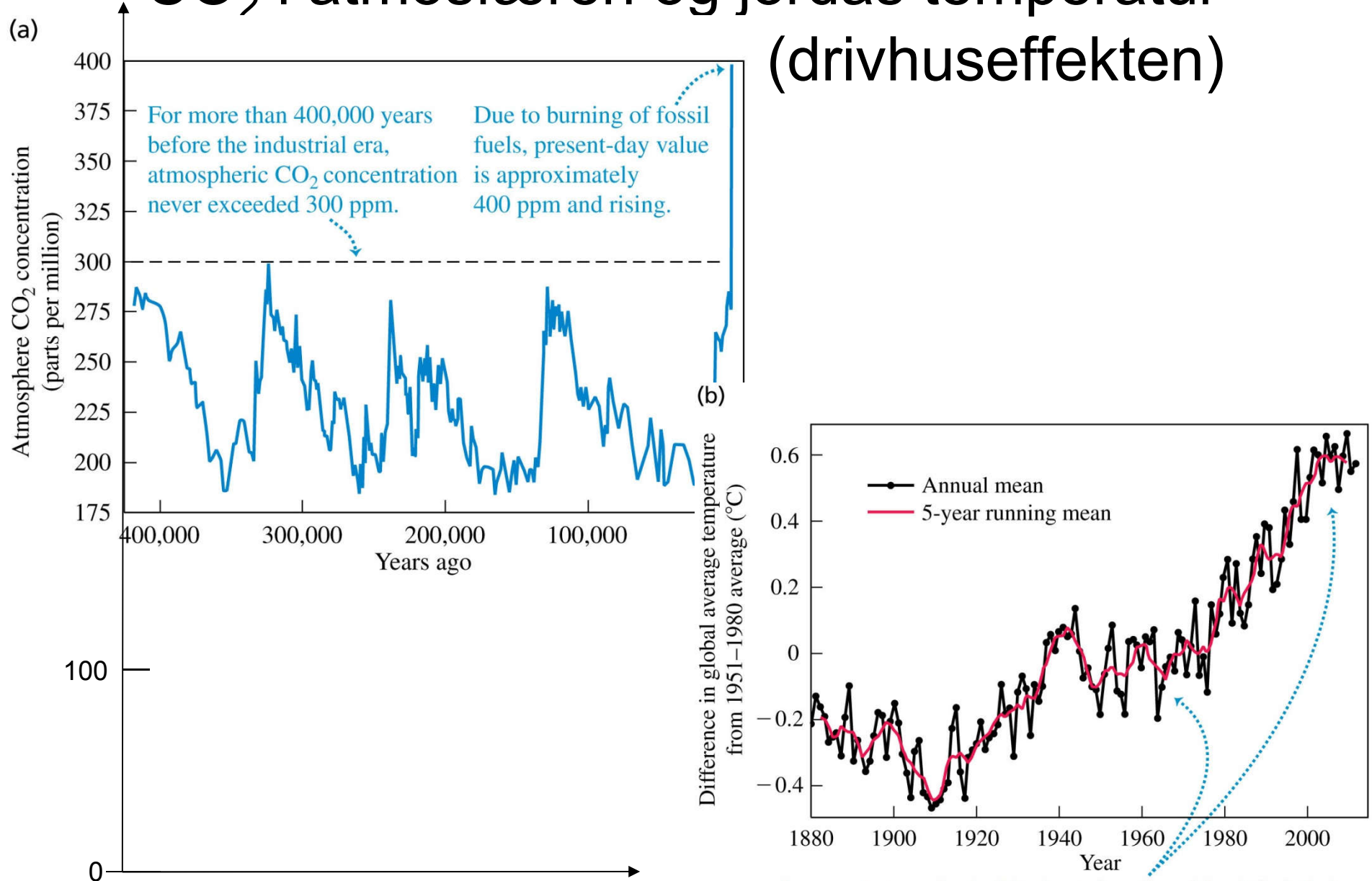
Energibalanse gir jordas «svartstrålingstemperatur»

$$T_{\text{j}} = -18,8 \text{ }^\circ\text{C}$$

Avvik til jordas snittemp.  $+14 \text{ }^\circ\text{C}$  skyldes **drivhuseffekten**.



# CO<sub>2</sub> i atmosfæren og jordas temperatur (drivhuseffekten)



Y&F Figure 17.30

Increased atmospheric CO<sub>2</sub> due to burning of fossil fuels is the cause of this continuing increase in global average temperatures.

▪ **Varmestråling:**

- Alle legemer/overflater stråler ut el.magn.stråling:
- Stefan-Boltzmanns lov:  $j = e \sigma T^4$  (W/m<sup>2</sup>)

**Eks. 4: Menneskekroppen:**

$$T = 32 \text{ } ^\circ\text{C} = 305 \text{ K}, \quad e = 0,8 \quad A = 1,8 \text{ m}^2$$

- $P_{\text{ut}} = e \sigma (305 \text{ K})^4 \cdot 1,8 \text{ m}^2 = 707 \text{ W}$  (naken kropp)

- 20 °C omgivelser:

$$P_{\text{inn}} = e \sigma (293 \text{ K})^4 = 602 \text{ W} \quad P_{\text{netto}} = 105 \text{ W} \quad (\text{ut})$$

- 0 °C omgivelser:

$$P_{\text{inn}} = e \sigma (273 \text{ K})^4 = 454 \text{ W} \quad P_{\text{netto}} = 253 \text{ W} \quad (\text{ut})$$

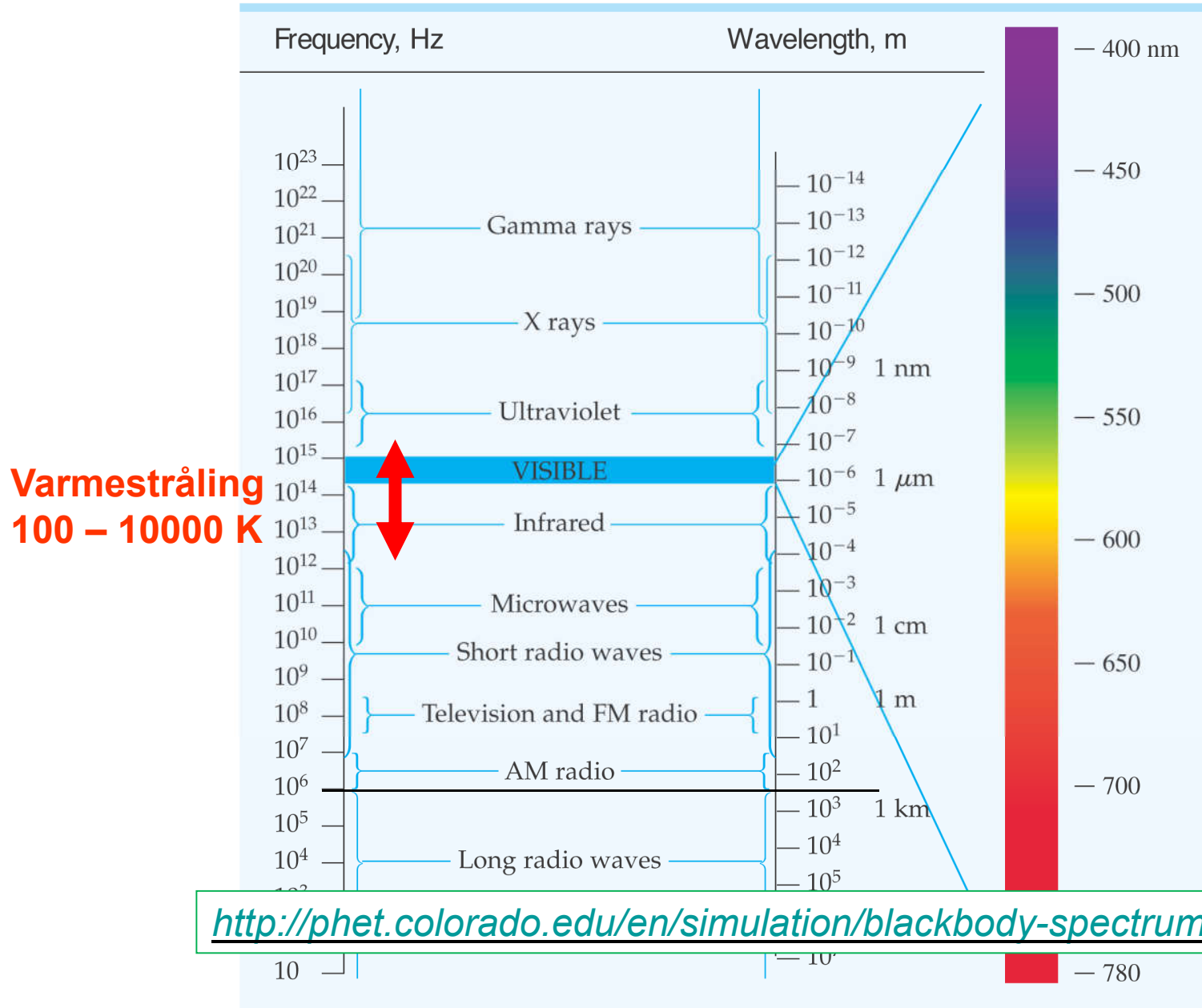
- Steikende sol 1,0 kW/m<sup>2</sup> :

$$P_{\text{inn}} = e \cdot 1,0 \text{ kW/m}^2 \cdot 0,5 \text{ m}^2 \\ + e \sigma (293 \text{ K})^4 \cdot 1,8 \text{ m}^2 = 1002 \text{ W}$$

$$P_{\text{netto}} = 295 \text{ W} \quad (\text{inn})$$

TABLE 30-1

The Electromagnetic Spectrum



# Plancks strålingslov

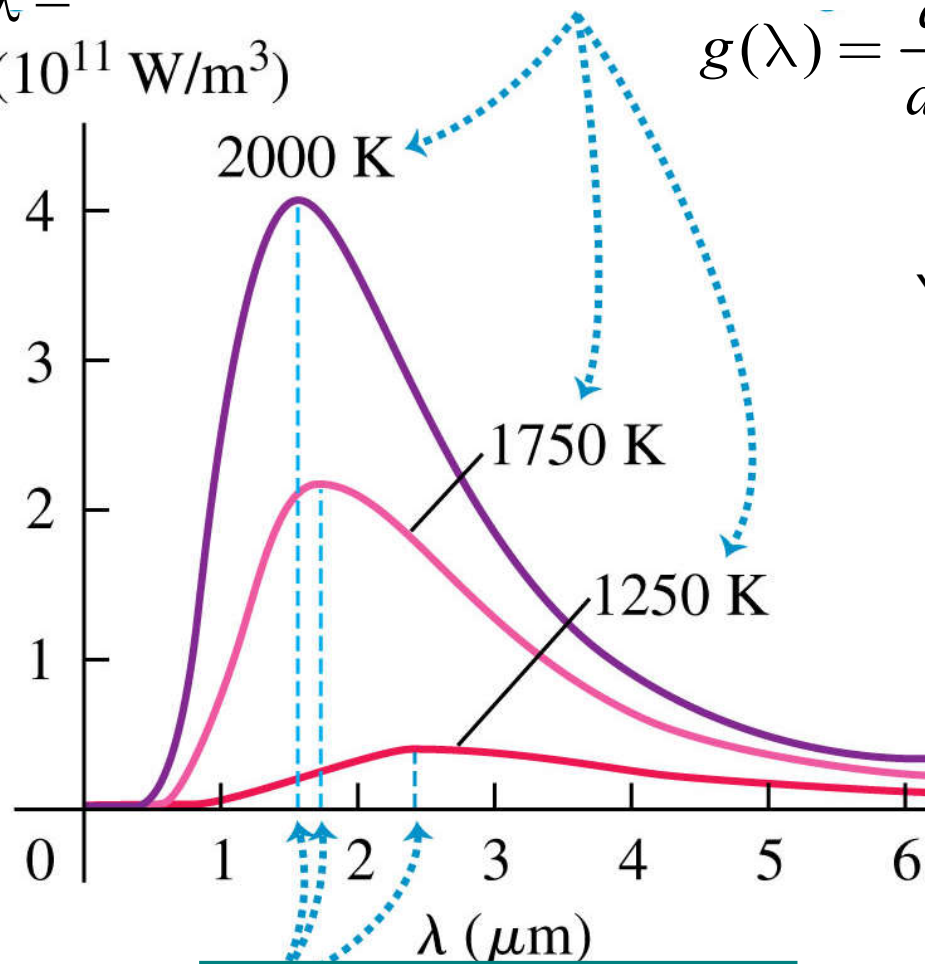
$$dj/d\lambda = I(\lambda) \text{ (} 10^{11} \text{ W/m}^3 \text{)}$$

$$g(\lambda) = \frac{dj}{d\lambda} = 2\pi hc^2 \frac{\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{hc}{k_B T \lambda}\right) - 1}$$

Young & Freedman bruker:

$$I(\lambda) = 2\pi hc^2 \frac{\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{hc}{k_B T \lambda}\right) - 1}$$

(litt uheldig da  $I$  ofte er intensitet)



$\lambda_{\max}$  øker når  $T$  avtar

$$\lambda_{\max} = 2898 \mu\text{m K} / T$$

*Wiens forskyvningslov*  
(Wilhelm Wien 1893, fra termodyn.)

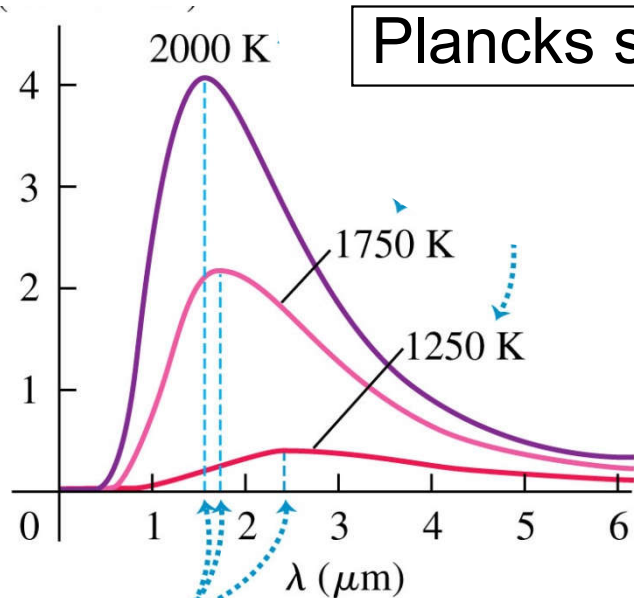


# Max Planck (1858 – 1947)

- Grunnlegger kvantemekanikk:  
1900: Strålingens bølgelengdefordeling
- 1918: Nobelpris fysikk

Kvantemekanikkens gjennombrudd rundt 1925:

- Werner Heisenberg (1901-1976)
- Albert Einstein (1879-1955)
- Erwin Schrödinger (1887-1961)



Plancks strålingslov

$$g(\lambda) = \frac{dj}{d\lambda} = 2\pi hc^2 \frac{\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{hc}{k_B T \lambda}\right) - 1}$$

Interaktiv graf:

[phet.colorado.edu/en/simulation/blackbody-spectrum](https://phet.colorado.edu/en/simulation/blackbody-spectrum)

$$43) \int_0^{\infty} \frac{x^{2n}}{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}} dx = \frac{E_n}{2} \left( \frac{\pi}{2\alpha} \right)^{2n+1}, \quad \alpha > 0, n = 0, 1, 2, \dots \quad *)$$

$$44) \int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{e^{\alpha x} - 1} dx = \frac{|B_{2n}|}{4n} \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^{2n}, \quad \alpha > 0, n = 1, 2, \dots \quad *)$$

$n = 2$   
 $\alpha = 1$   
 Bernoullitall  
 $B_4 = 1/30$

$\Rightarrow \pi^4/15$

$$45) \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6}$$

$$46) \int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{e^{\alpha x} + 1} dx = \frac{2^{2n-1} - 1}{2n} |B_{2n}| \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^{2n}, \quad \alpha > 0, n = 1, 2, \dots \quad *)$$

$$47) \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + 1} dx = \frac{\pi^2}{12}$$

$$48) \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$



# Plancks strålingslov

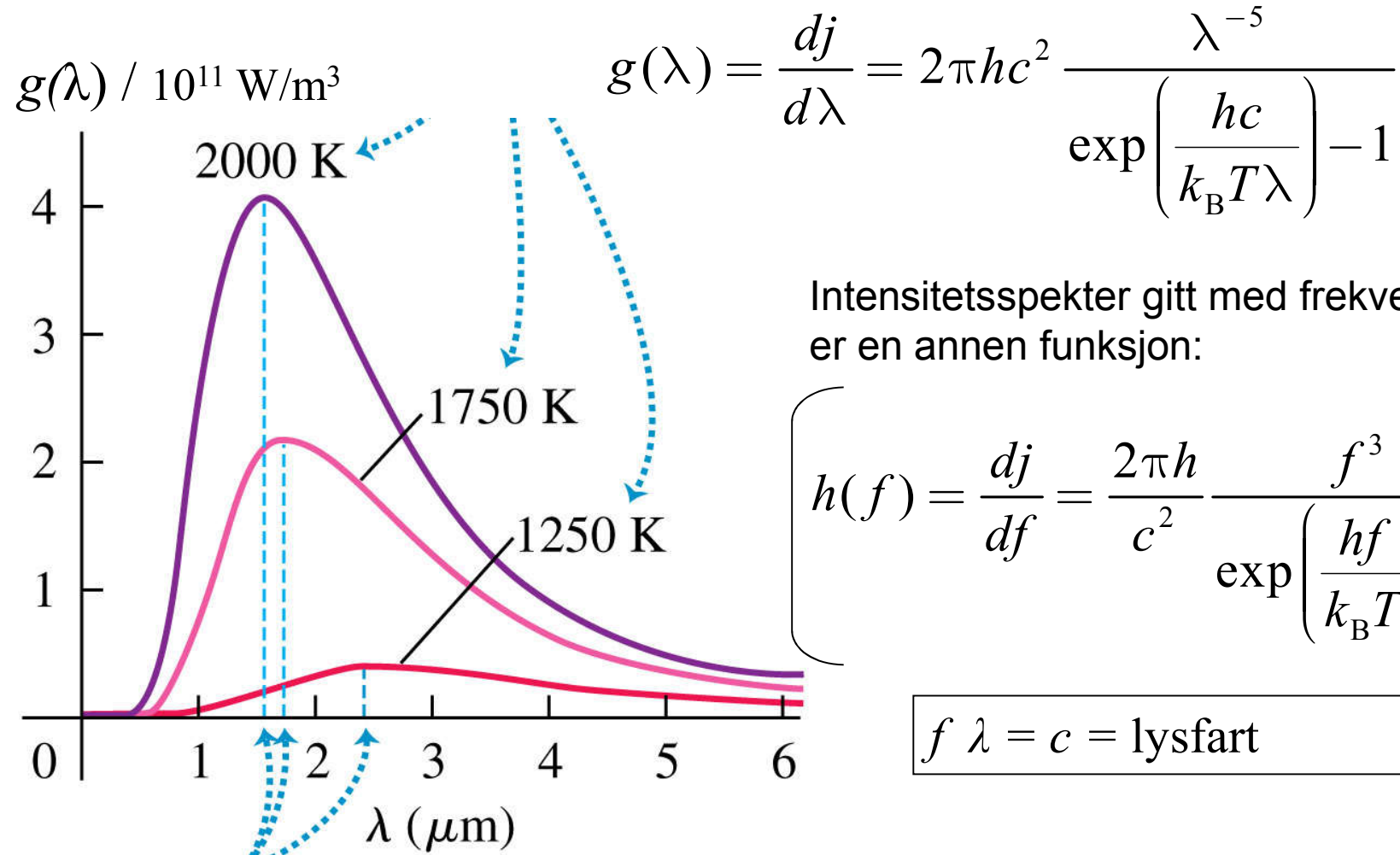
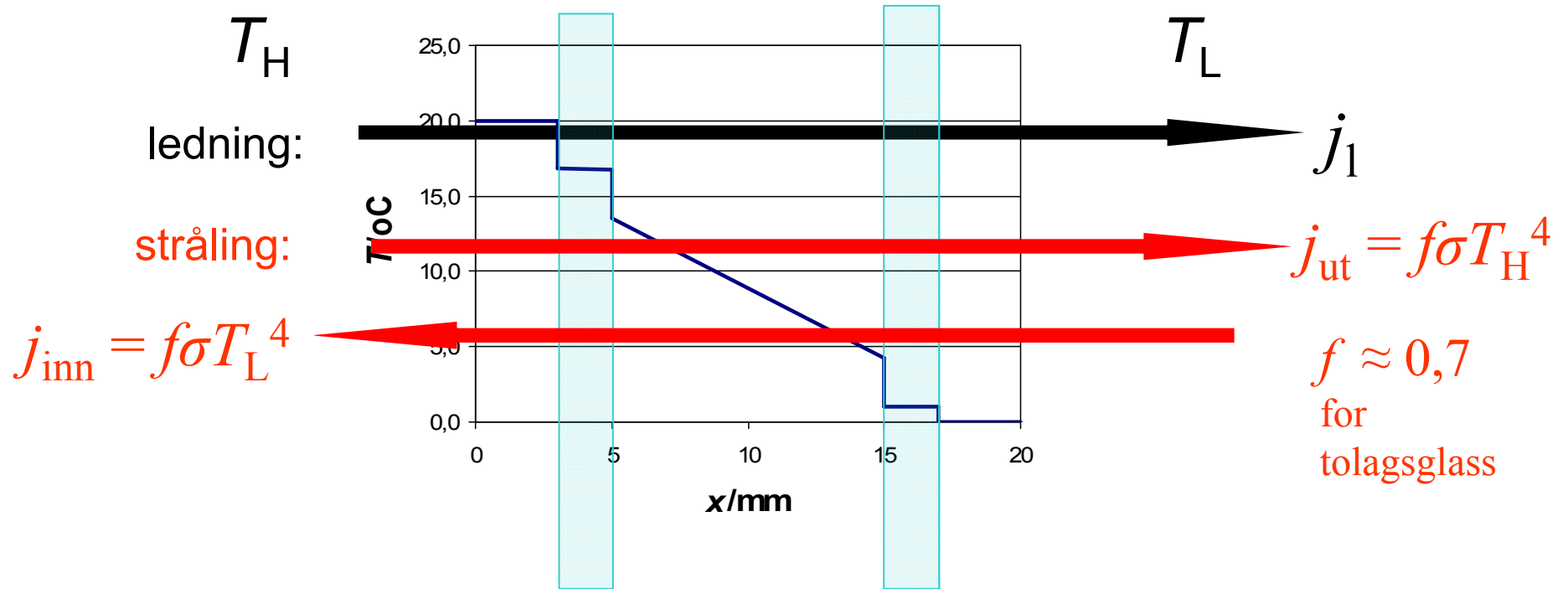


Figure 39.32

# Eks 5: Temperaturforløp dob.glassvindu



varmeledning:  $j_1 = (T_H - T_L) / A \Sigma R_i$ ,  $A \Sigma R_i = A(R_{\text{overgang}} + R_{\text{glass}} + R_{\text{luft}}) = 0,83 \text{ m}^2\text{K/W}$

varmestråling:  $j_s = j_{\text{ut}} - j_{\text{inn}} = f\sigma T_H^4 - f\sigma T_L^4 \approx f\sigma 4T_m^3 (T_H - T_L) = 3,60 \text{ W/m}^2\text{K} (T_H - T_L)$

$f \approx 0,7$  inkluderer, transmisjon, refleksjon, absorpsjon og emisjon

Totalt:  $j = (1,2 + 3,6) \text{ W/m}^2\text{K} (T_H - T_L)$       Stråling vesentlig bidrag!

# Vinduer og vegger: $U$ -verdi (tidligere $k$ -verdi)

Def:  $j = U \Delta T$  Enhet:  $W/m^2K$

$$j = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{\Delta T}{R} \frac{1}{A} = U \cdot \Delta T \Rightarrow U = \frac{1/R}{A}$$

der  $R = \text{varmeresistansen (K/W)}$

OBS:

Y&F's resistans:

$$R_{YF} = R A \Rightarrow U = 1/R_{YF}$$

www.enova.no:	U-verdi
Enkelt glass i ramme	5,0
To glass i koblet vindu	2,4
Tolags isolerrute	2,4
Tolags isolerrute med ett belagt glass og luft	1,6
Tolags isolerrute med ett belagt glass og argongass	1,4
Tolags isolerrute med belagt glass, argongass, varmkant, ny ramme og karm	1,2 - 1,1
Trelags isolerrute med to belagte glass, argongass, varmkant, ny ramme og karm	1,1 - 0,9
Trelags isolerrute med to belagte glass, argongass, varmkant, isolert ramme og karm	0,9 - 0,7

Minstekrav ny bolig: vinduer: 1,2; vegger: 0,18

Vårt vindu i Eks. 5 med varmeledning+stråling:

$$U = (1,2+3,6) W/m^2K = 4,8 W/m^2K \text{ (svært dårlig)}$$

# Varmetransport

## ▪ Varmeledning (Fouriers lov)

- Varmestrøm (W):  $dQ/dt = \kappa A \Delta T/\Delta l = \Delta T/R$   
er lik for alle lag gjennom f.eks. vindu.

- Varmestrømtetthet ( $\text{W/m}^2$ ):  $j = dQ/dt / A = - \kappa dT/dx$

## ▪ Konveksjon (materietransport) i gasser og væsker

## ▪ Varmeovergang mellom to materialer $j = - \alpha \Delta T$

## ▪ Varmestråling

- Alle legemer/overflater stråler ut el.magn.stråling, som øker sterkt med temperaturen  $T$ :

Stefan-Boltzmanns lov:  $j = e \sigma T^4$   $e = a$

$e = 1$  helt sorte overflater;  $e = 0$  helt blanke overflater

- Linearisering:  $j = \sigma (T_H^4 - T_L^4) \approx \sigma 4T_m^3 (T_H - T_L)$ ,  $T_m$  mellom  $T_H$  og  $T_L$

- Plancks strålingslov:

– Bølgelengdefordelingen for strålingsintensiteten:  $dj/d\lambda (\lambda, T)$ .

– Wiens forskyvningslov:  $\lambda_{\max} T = 2898 \mu\text{m K}$