

Kap. 8

Bevegelsesmengde. Kollisjoner. Massesenter.

Vi skal se på:

- Newtons 2. lov på ny: Definisjon bevegelsesmengde
- Kollisjoner:
 - Kraftstøt, impuls. Impulsloven
 - Elastisk, uelastisk, fullstendig uelastisk
- Massesenter (tyngdepunkt)

Kollisjoner skjer så raskt at vi *kan se bort fra* ytre krefter under kollisjonen

Hvor store er de **indre kreftene** $F_{12} = F_{21}$?

$$m = 56 \text{ g}$$

$$v = 50 \text{ m/s} \rightarrow v = -50 \text{ m/s}$$

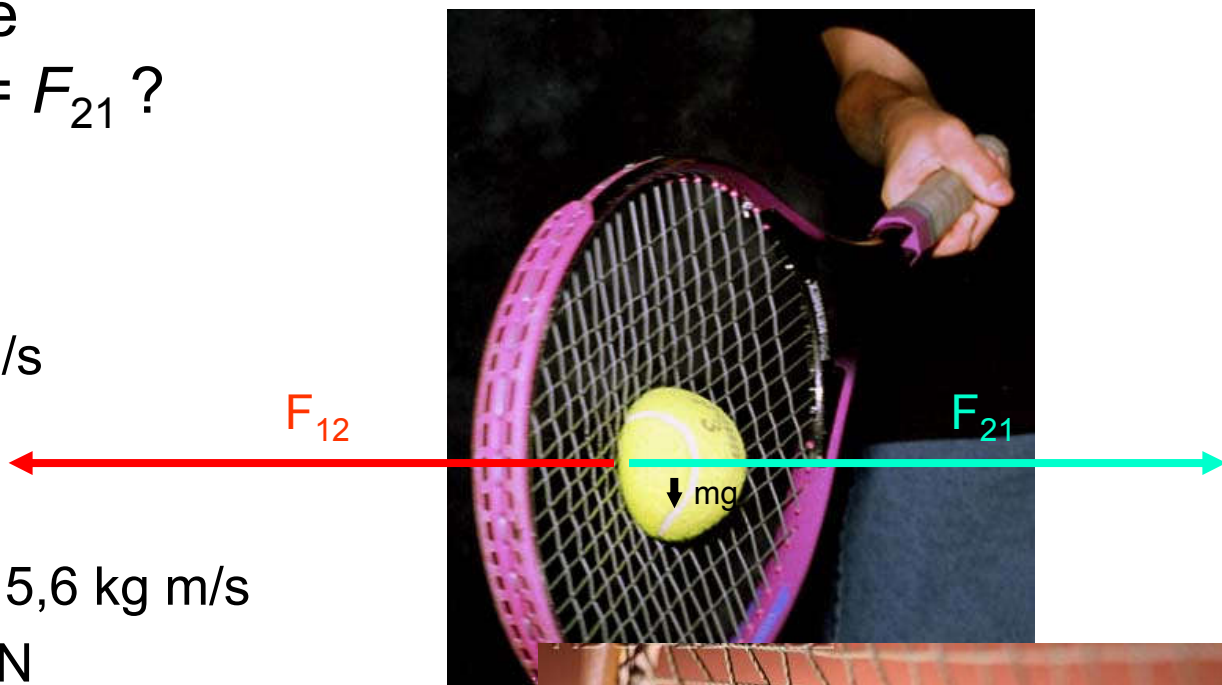
anta på $t = 0,005 \text{ s}$

$$\Rightarrow \Delta p = 56 \text{ g} \cdot 100 \text{ m/s} = 5,6 \text{ kg m/s}$$

$$\Rightarrow \langle F \rangle = \Delta p / \Delta t = 1120 \text{ N}$$

$$F_{\text{max}} \approx 2000 \text{ N}$$

Ytre kraft = tyngde = $mg = 0,56 \text{ N}$
er forsvinnende liten

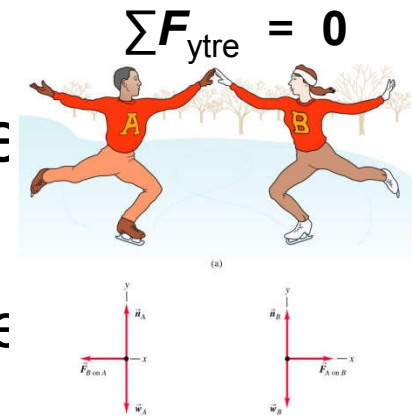


F_{max} for stor



Bevegelsesmengde. Kollisjoner. Massesenter.

- Bevegelsesmengde: $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$
- Opprinnelig form Newton 2: $\mathbf{F} = d\mathbf{p} / dt$
- **Kollisjoner:**
- Kraftstøt = $\mathbf{J} = \int \mathbf{F} dt = \Delta\mathbf{p}$ (impulslov)
- Ingen ytre krefter $\Rightarrow \mathbf{p}_{\text{tot}} = \text{konstant}$
 - Kraftstøt motsatt like stort på hvert legeme

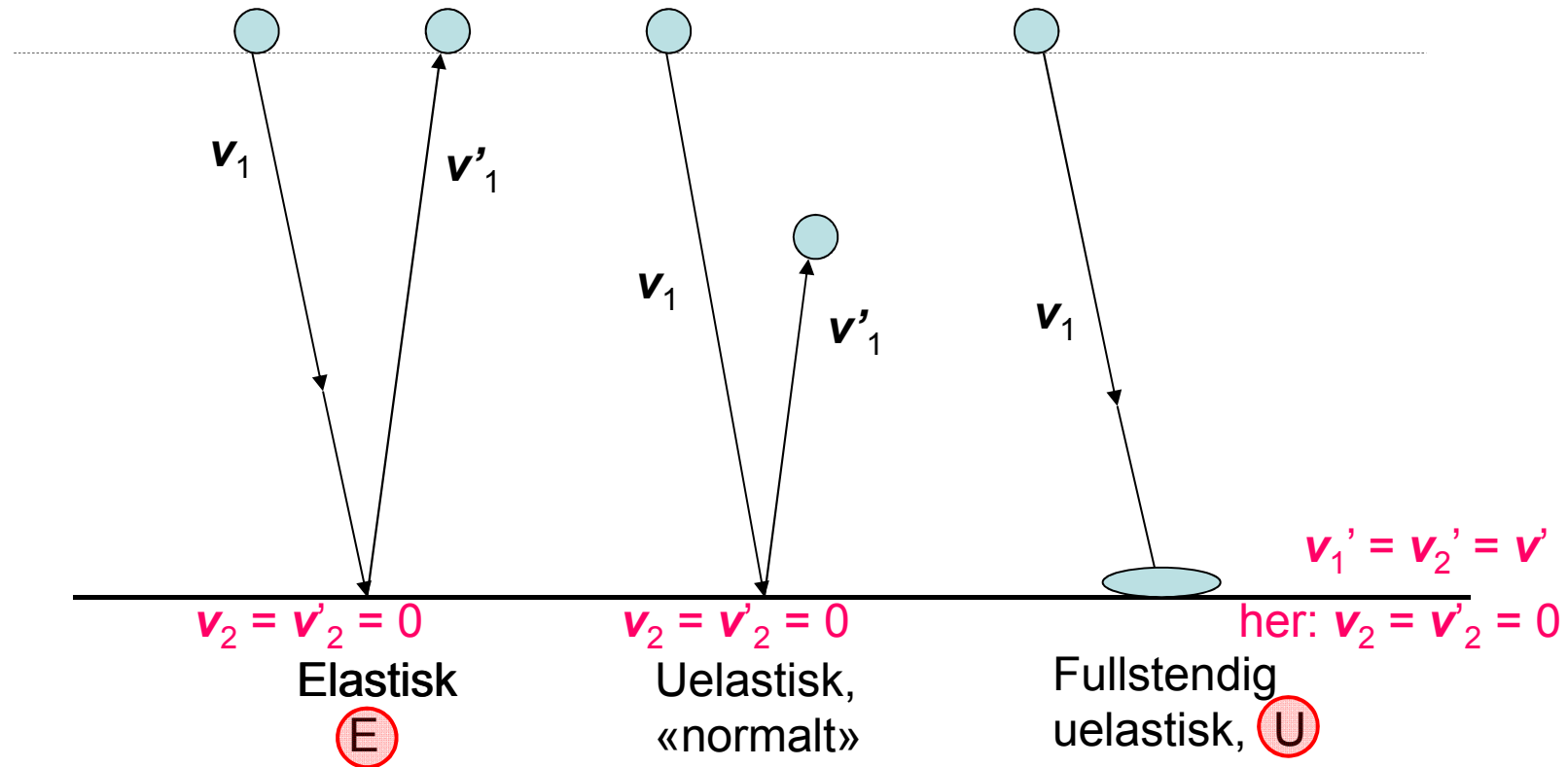


- **Tilleggslikninger:**

- **E** Elastisk støt: *Kinetisk energi bevart*
- **U** Fullstendig Uelastisk støt: *Felles slutfart* (energi avtar)
- Et «normalt» støt noe mellom E og U (energi avtar).

Tre klasser kollisjoner

(eksempel: kast mot vegg)



Alle kollisjoner: $m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2$

Tilsynelatende er ikke bev.mengde bevart i denne kollisjonen:

Fullstendig uelastisk med $m_2 \gg m_1$ og $v_2 = 0$ (vegg)

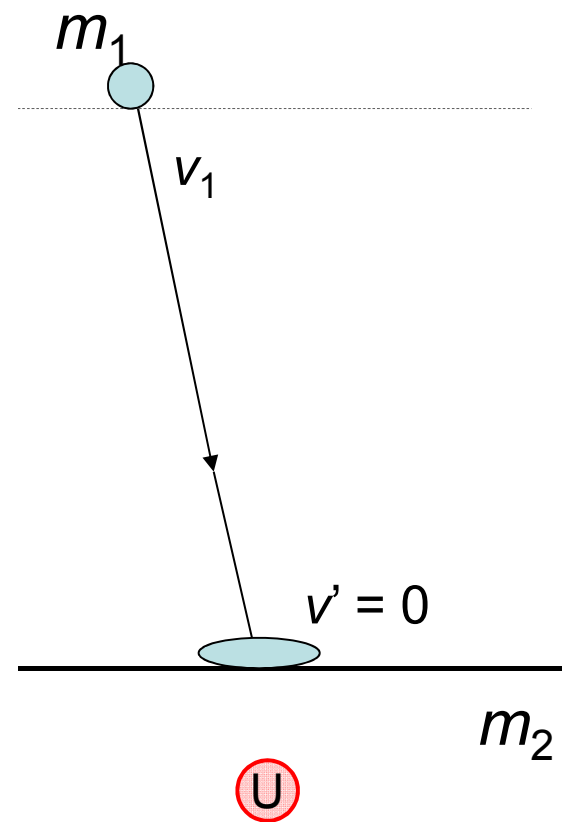
Før: $p = m_1 v_1$

Etter: $v' = 0 \Rightarrow p' = 0$

Likevel er p bevart :

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v' \approx \infty \cdot 0$$

!!



Så langt om kollisjoner:

- Antar ingen ytre krefter i selve kollisjonen
=> Bevegelsesmengde er bevart:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2$$

Tilleggslikning elastisk støt:

- Kinetisk energi bevart:

$$m_1 \mathbf{v}_1^2 + m_2 \mathbf{v}_2^2 = m_1 \mathbf{v}'_1^2 + m_2 \mathbf{v}'_2^2$$

med generell løsning:

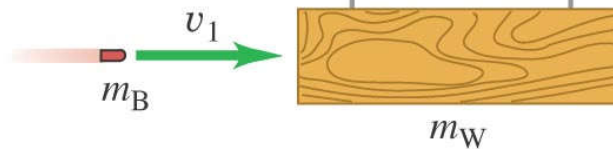
$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$
$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_2 + m_1}$$

Tilleggslikning fullstendig uelastisk støt:

- Felles slutfart: $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}'_2$

Y&F: Ex. 8.8: Fullstendig uelastisk støt "Ballistisk pendel":

BEFORE COLLISION



To ukjente:

v_1 og fellesfarten $v' = v_1' = v_2'$

To likninger:

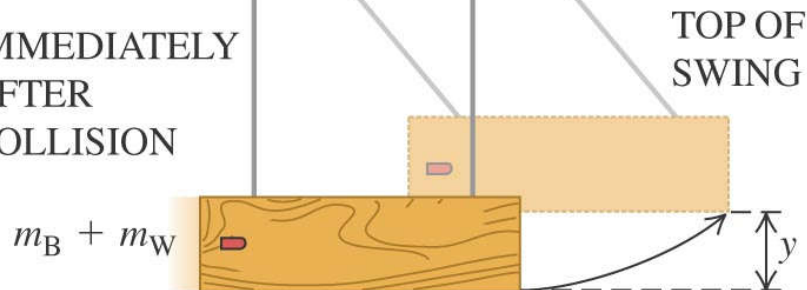
Bev.mengdebevarelse under støtet:

$$m_B v_1 + m_W \mathbf{0} = (m_B + m_W) v'$$

Energibevarelse under oppsvinget:

$$\frac{1}{2} (m_B + m_W) v'^2 = (m_B + m_W) g y$$

IMMEDIATELY
AFTER
COLLISION

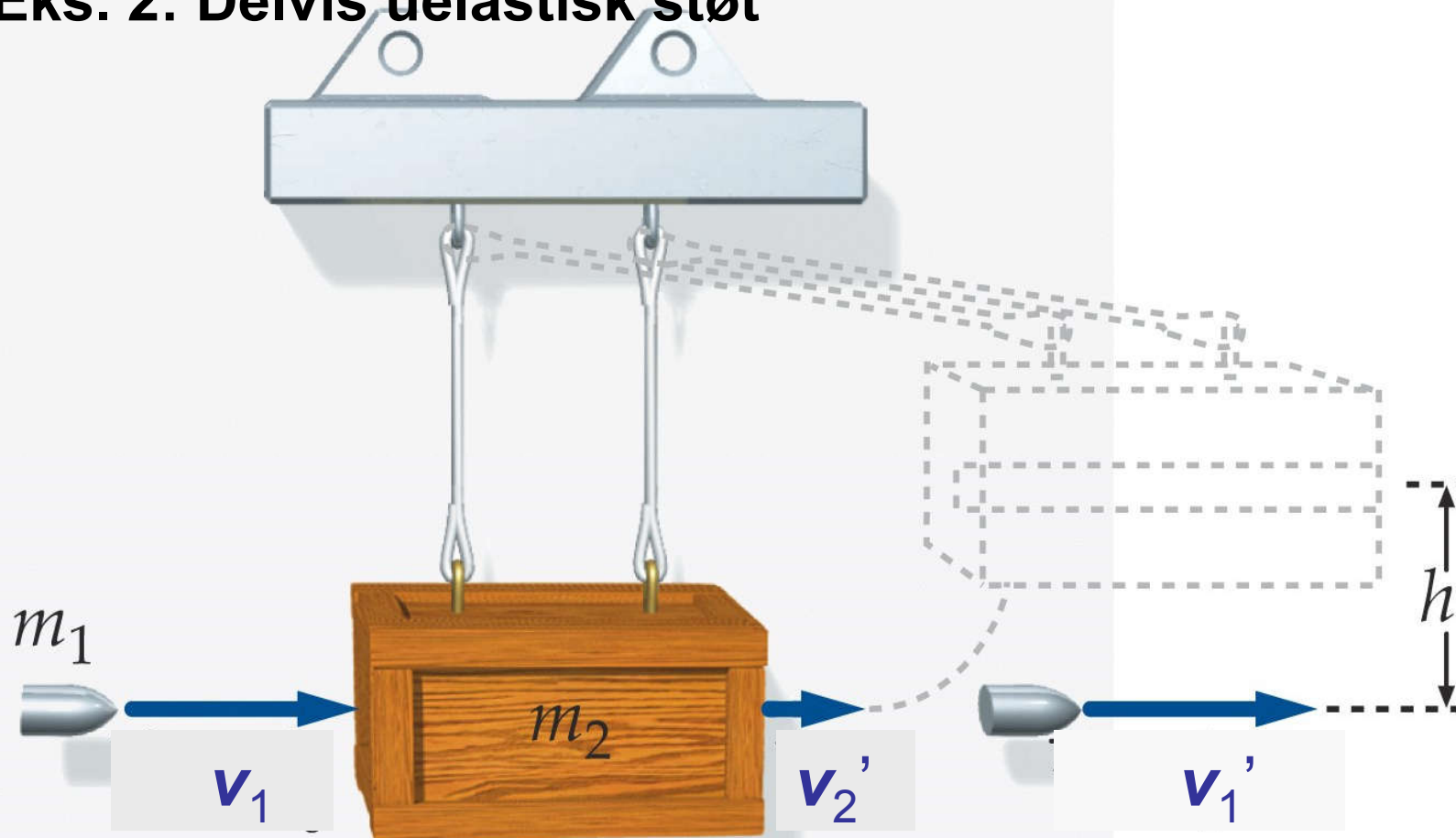


IKKE energibevaring under støtet:

$$\frac{1}{2} (m_B + m_W) v'^2 < \frac{1}{2} m_B v_1^2$$

~~v_2~~ $v' = v_1' = v_2'$

Eks. 2: Delvis uelastisk støt



Tre ukjente: Før støt: v_1 . Etter støt: v_1' og v_2'

To likninger: Bev.mengdebevarelse under støtet (1)

 Energibevarelse under oppsvinget (2)

Tilleggsopplysning: F.eks. oppgitt kulas fart etter støtet: $v_1' = \frac{1}{2} v_1$ (3)
(evt. kunne tap i energi vært oppgitt)

Massesenter

Y&F kap. 8.5
L&L kap. 5.6

- *Punktpartikkel*: all masse i ett punkt
- *Flerpartikkelsystem*:
Legeme = \sum punktpartikler
(nødvendig mhp. rotasjon, bøyning, deformasjon)
- *Massesenter* \vec{r}_{cm} :

- Topartikkelsyst.
$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$$

- N -partikkelsyst.
$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (8.29)$$

- Kontinuerlig
$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{\int_{\text{legeme}} \vec{r} \cdot dm}{\int_{\text{legeme}} dm} = \frac{1}{M} \int_{\text{legeme}} \vec{r} \cdot dm \quad (8.29B)$$

Massesenter

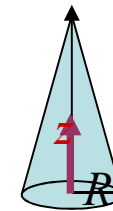
Y&F kap. 8.5
L&L kap. 5.6

- Topartikkelsystem $\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$

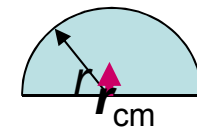
- N -partikkelsystem $\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$ (8.29)

- Kontinuerlig $\vec{r}_{cm} = \frac{\int_{legeme} \vec{r} \cdot dm}{\int_{legeme} dm} = \frac{1}{M} \int_{legeme} \vec{r} \cdot dm$ (8.29B)

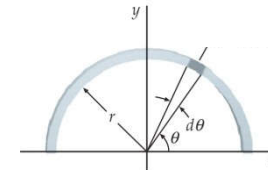
3-dim: Integrasjon over volum: $dm = \rho dV$. Eks:



2-dim: Integrasjon over plan: $dm = \sigma dA$. Eks:



1-dim: Integrasjon langs linje: $dm = \lambda ds$. Eks:

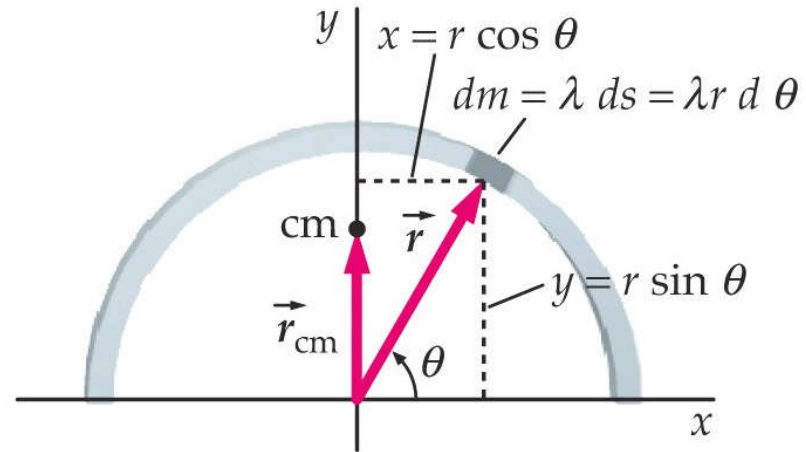


Eksempler massesenter

Halvsirkel

$$dm = \lambda ds$$

$$[\lambda] = \text{kg} / \text{m}$$

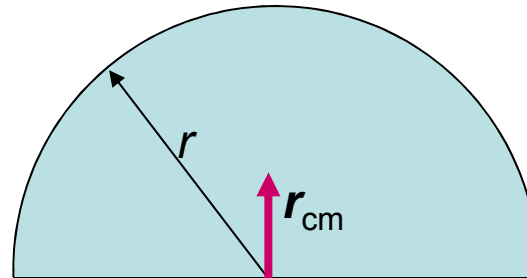


$$y_{\text{cm}} = r \frac{2}{\pi} = 0,64 r$$

Halv sirkelplate:

$$dm = \sigma dA$$

$$[\sigma] = \text{kg} / \text{m}^2$$



$$y_{\text{cm}} = r \frac{4}{3\pi} = 0,42 r$$

Oppgave:

Ei kule skytes inn i en trekloss som farer opp i lufta (fullst. uelastisk støt).

Kula treffer ved A, B eller C.

Hvilket treff løfter treklossen til størst høyde h ?

Svar:

Like høyt for alle.

Bevegelsesmengde bevart:

Alltid samme fart for klossen:

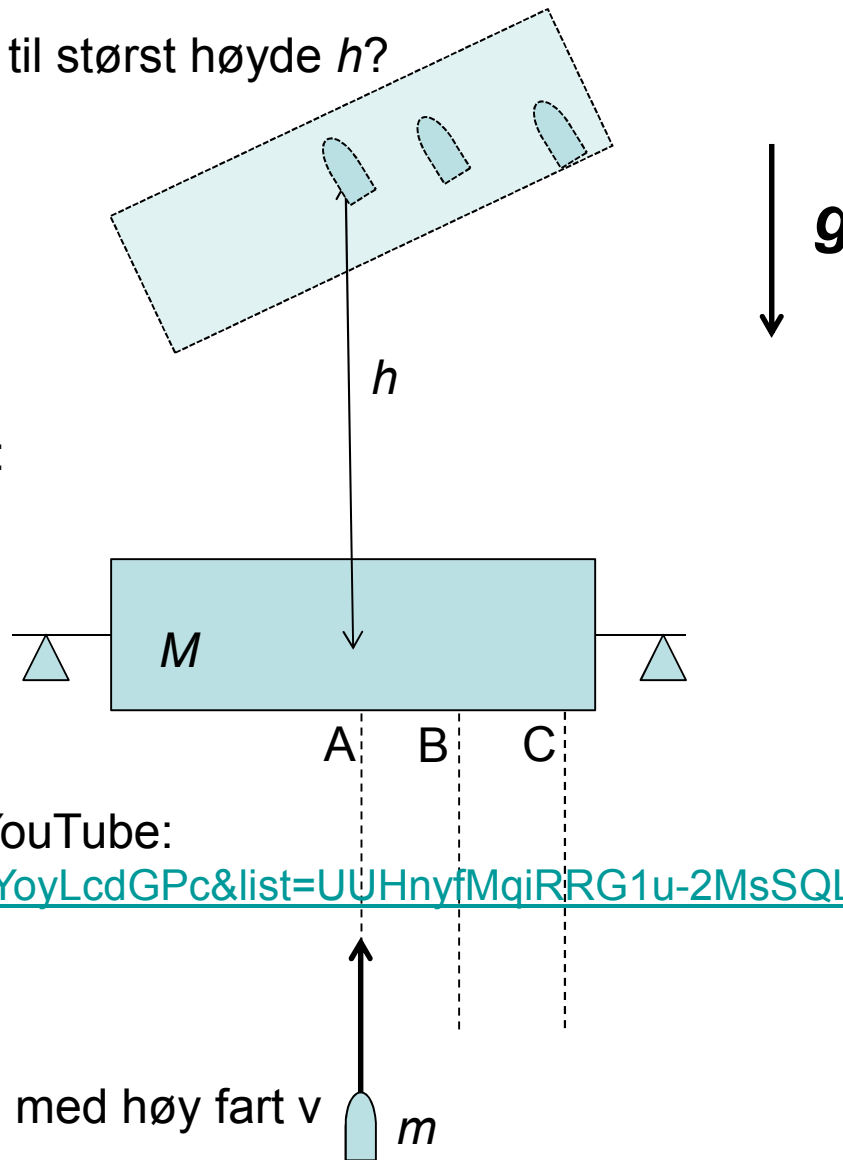
$$mv = (M+m)V_{\text{cm}}$$

I tillegg kommer rotasjon ved B og C (mest ved C)

Demonstrert og forklart på YouTube:

www.youtube.com/watch?v=BLYoyLcdGPc&list=UUHnyfMqiRRG1u-2MsSQLbXA

Kule med høy fart v

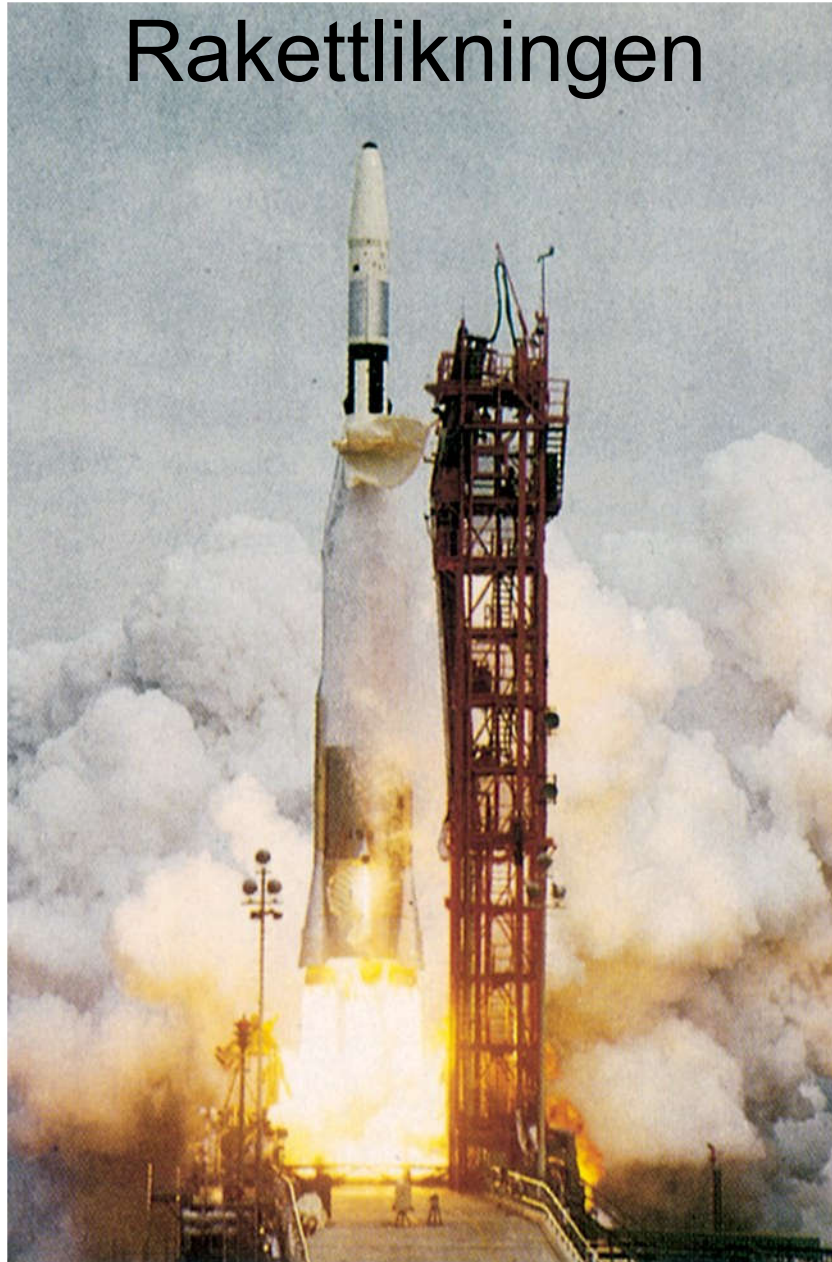


Massesenter

- *Tyngdepunkt = massesenter*
dersom tyngdeaksel. \mathbf{g} er lik over hele legemet
- Newtons lov for massesenter: $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = m\mathbf{a}_{\text{cm}}$
- Tyngdens pot. en: $E_p = gM z_{\text{cm}}$

Variabel masse

Rakettlikningen



Y&F kap. 8.6
L&L kap. 5.4

Rakettlikningen ikke
pensum 2016

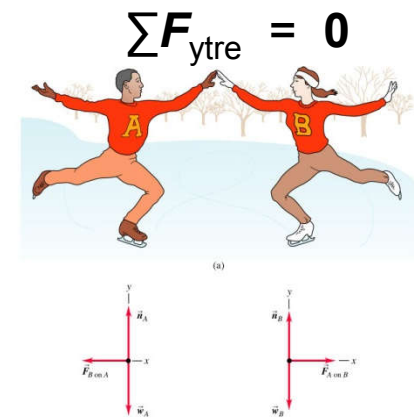
Kun som eksempel
i oppgave:

Øving 4, opg. 5

Kap. 8. Oppsummert.

Bevegelsesmengde. Kollisjoner. Massesenter.

- Massesenter $\mathbf{r}_{\text{cm}} = \int \mathbf{r} dm/M$.
- Bevegelsesmengde: $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$
- Opprinnelig form Newton 2: $\mathbf{F} = d\mathbf{p} / dt$
- Kraftstøt = $\mathbf{J} = \int \mathbf{F} dt = \Delta\mathbf{p}$ (impulsloven=Newton2)
- Ingen ytre krefter $\Rightarrow \mathbf{p}_{\text{tot}} = \text{konstant}$
 - Kraftstøt motsatt like stort på hvert legeme
- **Kollisjoner.**
- **Tilleggslikninger:**
 - **E** Elastisk støt: *Kinetisk energi bevart*
 - **U** Fullstendig Uelastisk støt: *Felles slutfart* (energi avtar)
 - Et «normalt» støt noe mellom E og U (energi avtar).
- Newtons lov for massesenter: $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = m\mathbf{a}_{\text{cm}}$
- Tyngdens pot. en: $E_p = gM z_{\text{cm}}$



Kap 8. Oppsummert: Massesenter

- *Punktpartikkel*: all masse i ett punkt

- *Flerpartikkelsystem*:

Legeme = \sum punktpartikler

(nødvendig mhp. rotasjon, bøyning, deformasjon)

- *Massesenter \vec{r}_{cm}* :

- Topartikkelsyst.

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$$

- *N-partikkelsyst.*

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (8.29)$$

- Kontinuerlig

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int_{legeme} \vec{r} \cdot dm}{\int_{legeme} dm} = \frac{1}{M} \int_{legeme} \vec{r} \cdot dm \quad (8.29B)$$

- *Tyngdepunkt = massesenter* dersom \mathbf{g} er lik over hele legemet

1-dim: Integrasjon langs linje: $dm = \lambda ds$.

2-dim: Integrasjon over plan: $dm = \sigma dA$.

3-dim: Integrasjon over volum: $dm = \rho dV$.