Kap. 9+10
Rotasjon av stive legemer

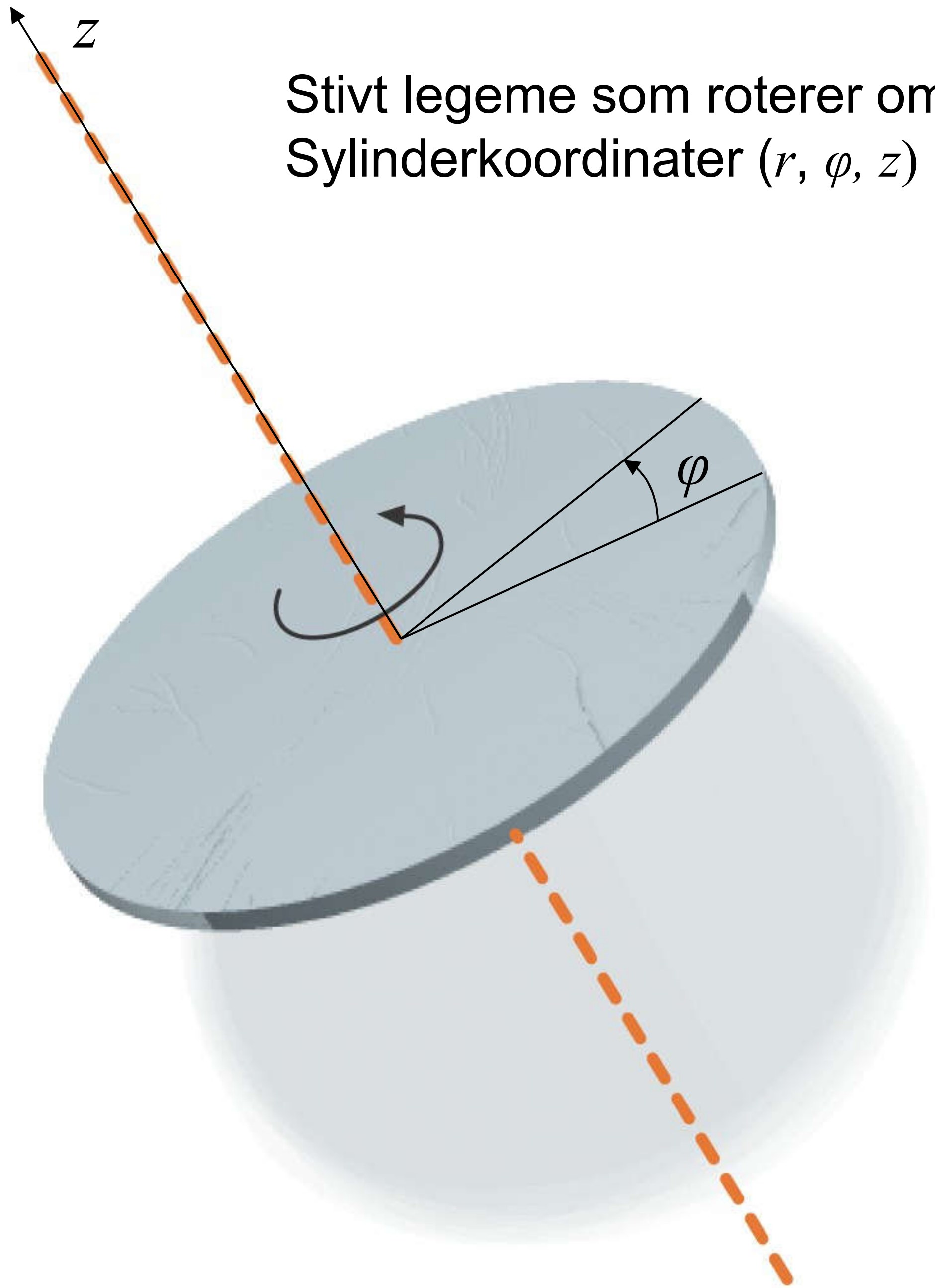
Vi skal se på:

- Vinkelhastighet, vinkelakselerasjon (rask rekap)
- Sentripetalakselerasjon, baneakselerasjon (rask rekap)
- Rotasjonsenergi E_k
- Treghetsmoment I
- Kraftmoment $\boldsymbol{\tau}$
- Rulling
- Spinn (dreieimpuls): $\boldsymbol{L}$
- Spinnsatsen (Newton 2 for rotasjon):

$$\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$$

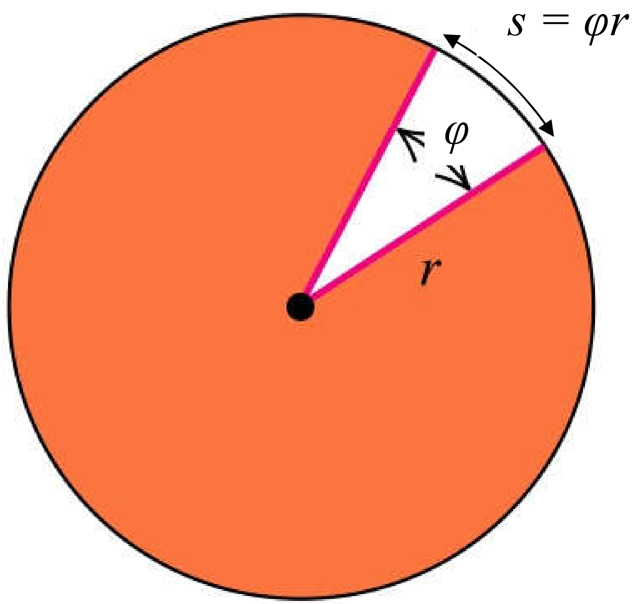
- Stive legemer: $\boldsymbol{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\tau} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$
- Eksempler: gyroskop, m.m.m…

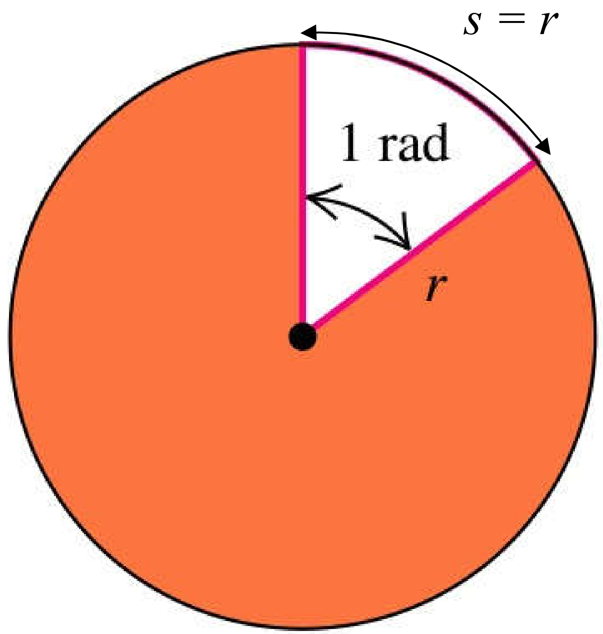
Stivt legeme som roterer om z-akse:
Sylinderkoordinater (r, φ, z) hensiktsmessig



Vinkler måles i radianer:

$$\varphi = s/r$$

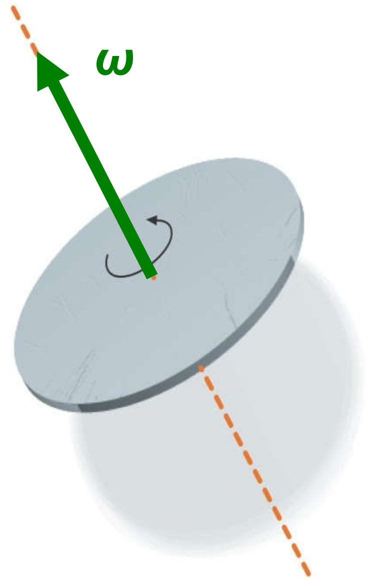




Vinkelhastighet:

$$\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$$

Viktige størrelser (rotasjon)

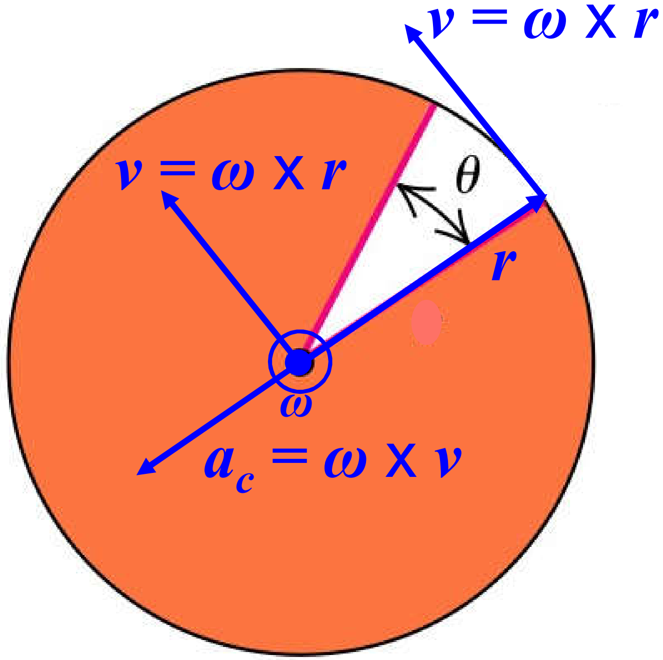


- Vinkelpos. $\varphi = s/r$
- Vinkelhastighet $\omega = d\varphi/dt = v/r$
  - Vektorstørrelse: $\boldsymbol{\omega}$ langs akseretning
- Periode T = tid/omdr = $1/f$
- Frekvens $f = 1/T$
- Vinkelfrekvens = vinkelhastighet = $\omega = 2\pi f$
- Vinkelaksel. $\alpha = d\omega/dt = d^2\varphi/d^2t$
- Banefart $v = |v| = ds/dt = \omega r$
  - Vektorstørrelse: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$
- Baneaksel. $a_t = \alpha r$
- Sentr.aksel. $a_c = v^2/r = \omega v = \omega^2 r$
  - Vektorstørrelse: $\vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$
  - Total aksel = $\vec{a} = -a_c \hat{r} + a_t \hat{\varphi}$

Vektorer:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{a}_c = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$



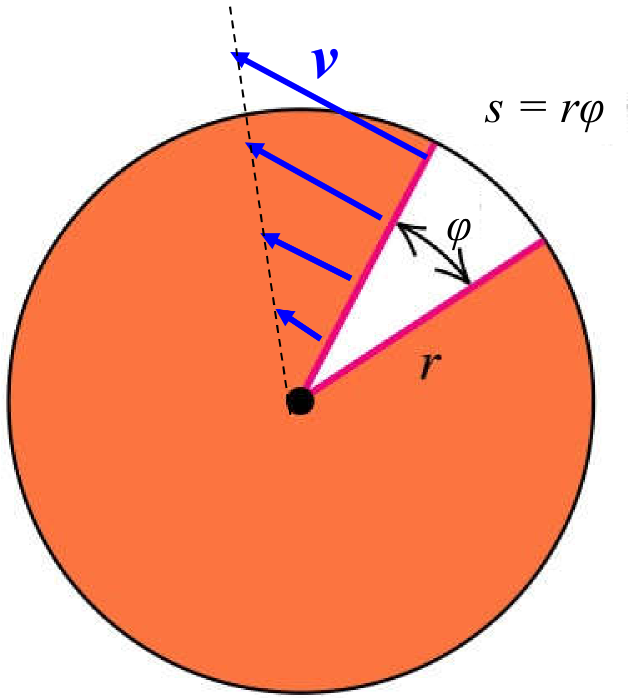
Lik for hele legemet:

Vinkelhastighet $\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$

Vinkelaksel. $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$

Øker med radien r :

Banefart $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = \omega\, r$

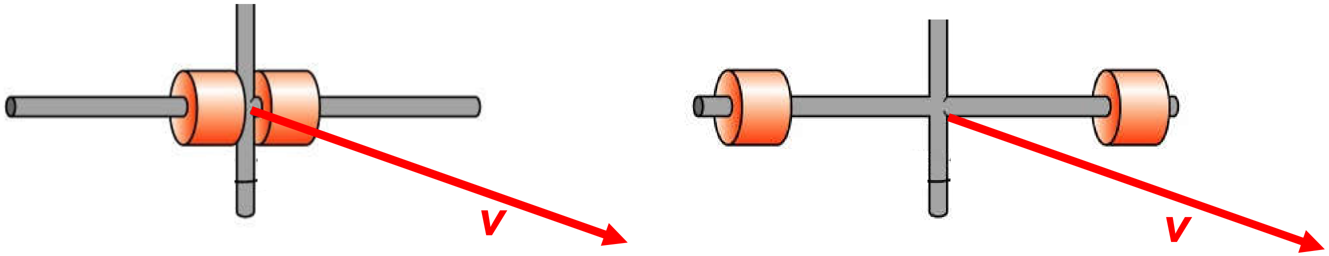


Tang.aksel. $a_\mathrm{t} = \alpha\, r$

Sentr.aksel. $a_\mathrm{c} = \omega^2\, r$

- Translasjon: $E_k = ½\, m\, v^2$

Massens plassering ingen betydning for E_k

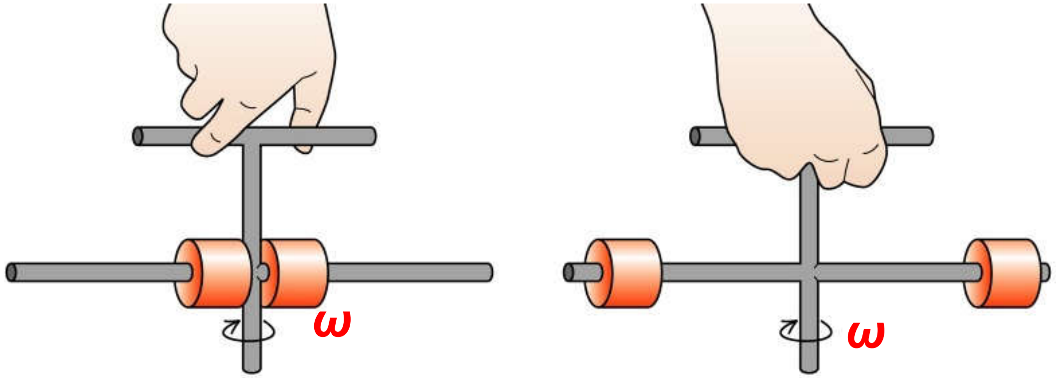


Samme ***v*** ,
samme E_k

- Rotasjon: $E_k = ½\, I\, \omega^2$

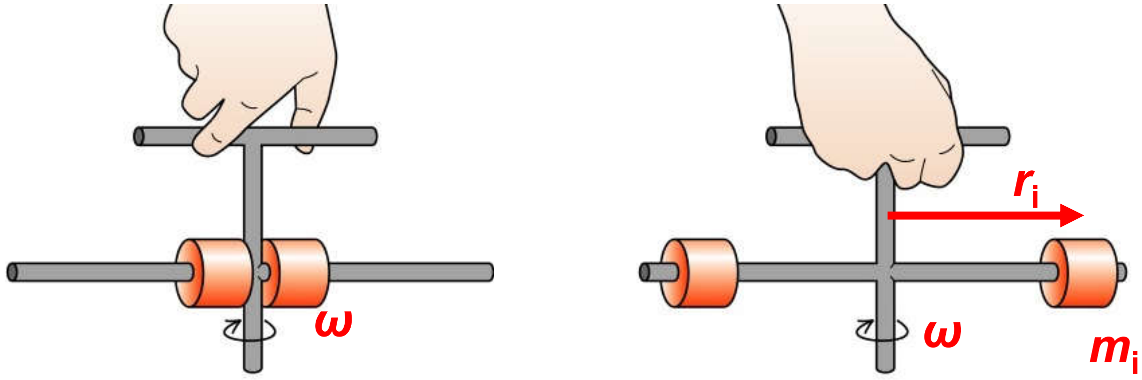
  der $I = \Sigma\, r_i^2\, m_i$

E_k øker med (massens avstand)^2 fra aksen



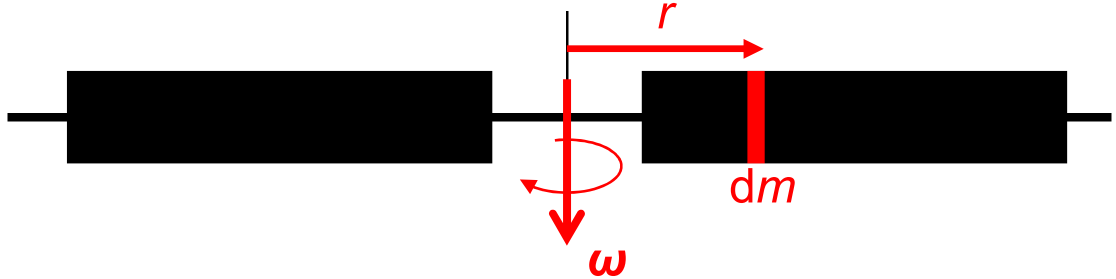
Samme ***ω***, men ulik E_k

$$E_k = \tfrac{1}{2}\, I\, \omega^2$$



$$I = \Sigma\, r_i^2 m_i$$

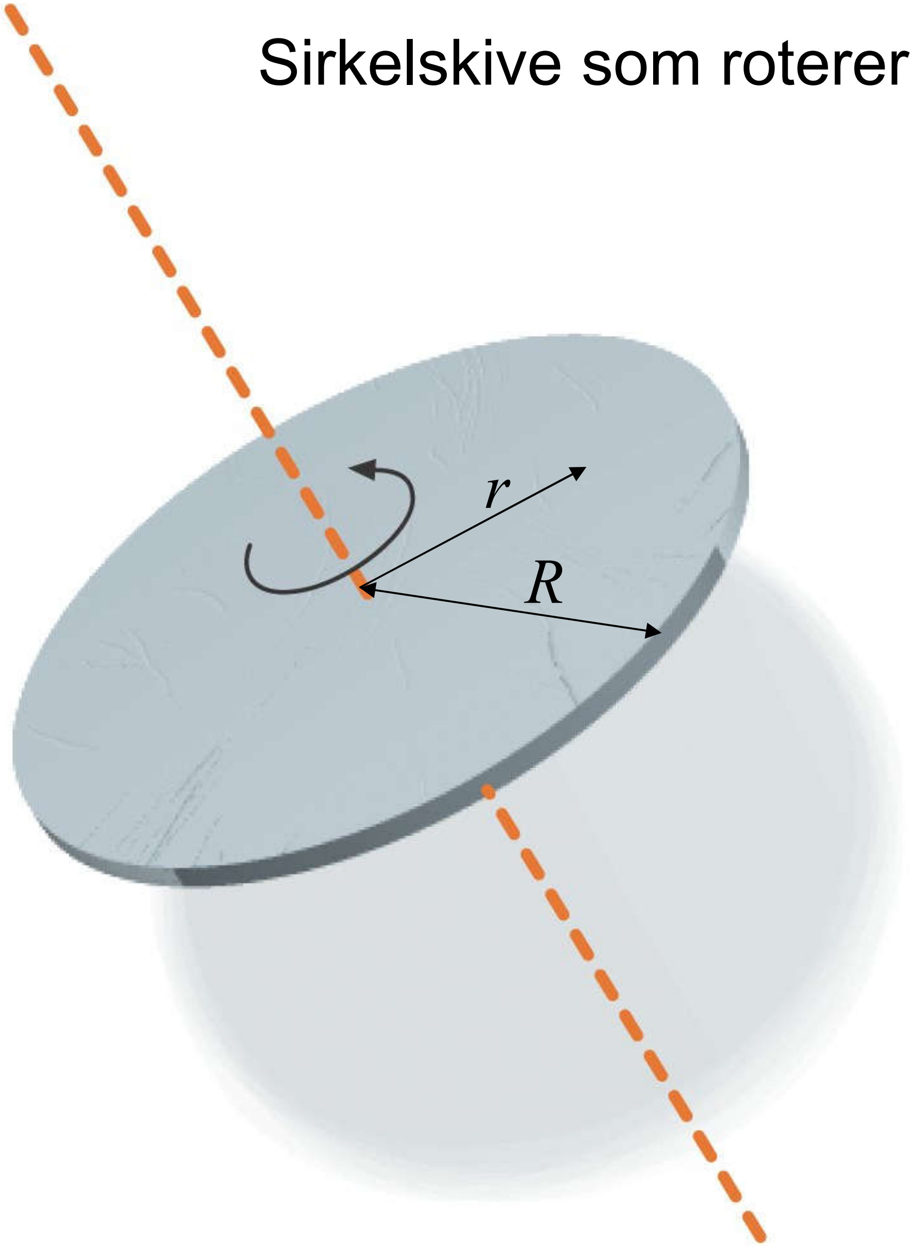
Her må vi integrere:



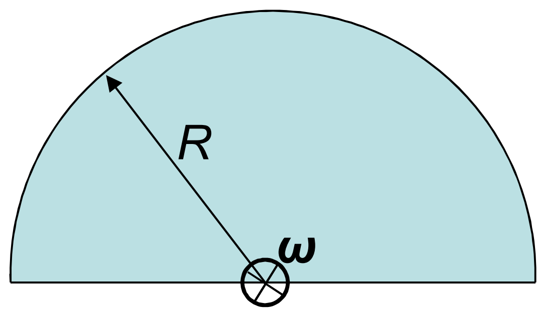
$$I = \int r^2\, \mathrm{d}m$$

Sirkelskive som roterer om symmetriakse

$$I = \tfrac{1}{2} M R^2$$



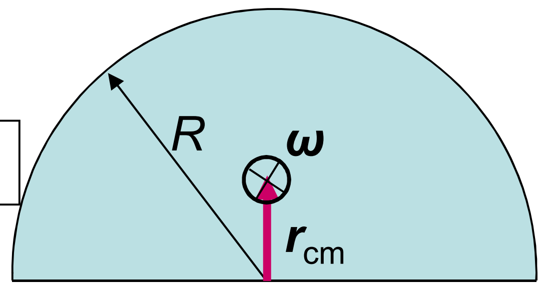
Halvsirkelskive som roterer om «sirkelsentrum»



$I = \frac{1}{2} M R^2$

Halvsirkelskive som roterer om c.m.

$y_{cm} = R\, 4/(3\pi) = 0{,}42\, R$



$I = ?$

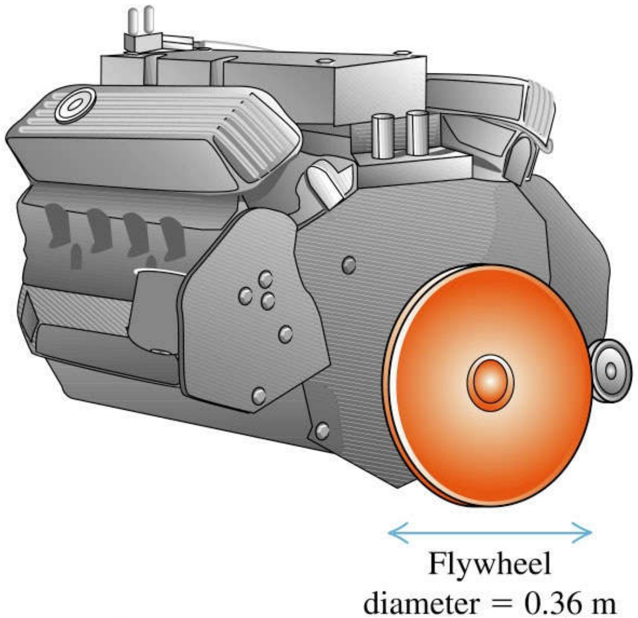
Mye vanskeligere å beregne. Skal heller bruke *Steiners sats* (… kommer)

$I = 0{,}32 \cdot MR^2$

Rotasjonshjul som energilager

- Brukes for å stabilisere rotasjonshastighet i motorer

- Kan lagre store energimengder (hvis store dimensjoner og stor hastighet)



Brukes i motorkjøretøy:
KERS = Kinetic Energy Recovery System:
en.wikipedia.org/wiki/KERS
Ett eksempel: R=12 cm M=5,0 kg f= 64 500 rpm
=> E = 400 kJ

KERS i sykler (f.eks. lagre bremseenergi)
https://www.youtube.com/watch?v=5FJcEvijjks

Med KERS kan trolleybusser kjøre uten strøm (Zürich):

Kap. 9+10. Rotasjon av stive legemer

Vi har sett på:

- Vinkelhastighet $\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$, vinkelakselerasjon $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$
- Banehastighet $v = r\,\omega$
- Sentripetalaks. $a_c = -\,r\,\omega^2 = -\,\omega\,v = -\,v^2/r$
- Baneakselerasjon $a_t = r\,\alpha$
- Rotasjonsenergi $E_k = ½\,I\,\omega^2$
- Treghetsmoment $I = \Sigma\, r_i^2\, m_i = \int r^2\,\mathrm{d}m$ (om en gitt akse)
  - Ring om sentrum: $I = M\,R^2$
  - Skive om sentrum: $I = ½\,M\,R^2$
  - Lang, tynn stav om midtpunkt: $I = (1/12)\,M\,L^2$

    (Alle disse gjennom massefellespunktet = cm)

Vektorer: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)$

- Steiners sats (parallellakseteoremet):

  Treghetsmoment om annen parallell akse i avstand d:

  $$I = I_0 + M\,d^2$$

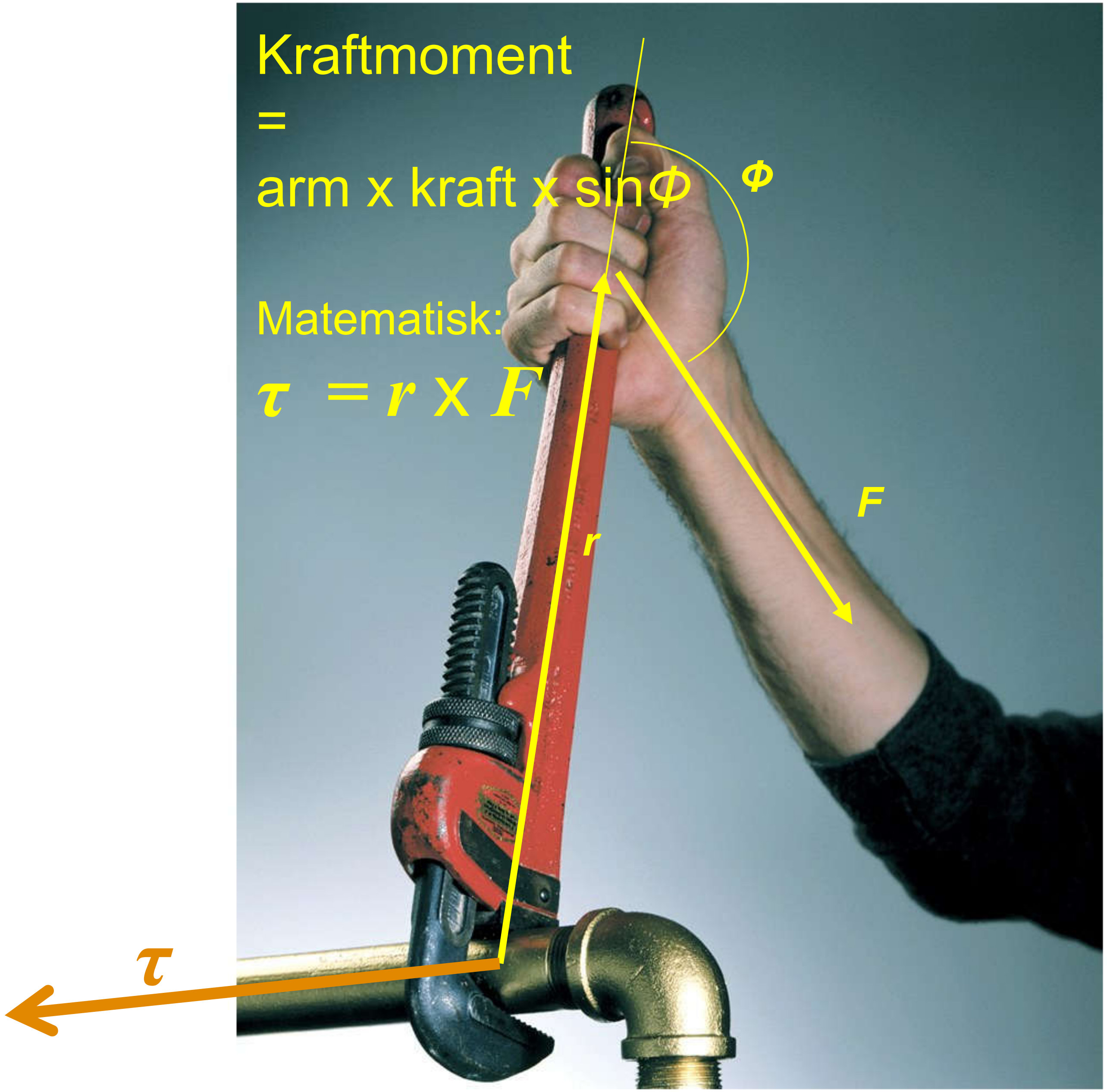
  dvs. I_0 (akse gjennom cm) er alltid **minst** mulige treg.moment

http://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_axes_rule

Kap. 9+10 Rotasjon av stive legemer

Vi skal se på:

- Vinkelhastighet, vinkelakselerasjon (rep)
- Sentripetalakselerasjon, baneakselerasjon (rep)
- Rotasjonsenergi E_{k}
- Treghetsmoment I
- Kraftmoment $\boldsymbol{\tau}$
- (N2-rot) stive legemer: $\boldsymbol{\tau} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$
- Rulling
- Spinn (dreieimpuls): $\boldsymbol{L}$
- (N2-rot) alle legemer: $\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$
- Stive legemer: $\boldsymbol{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\tau} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$
- Eksempler: gyroskop, m.m.m…


Kraftmoment
=
arm x kraft x sin Φ
Φ
Matematisk:
$\tau = r \times F$
r
F
τ

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

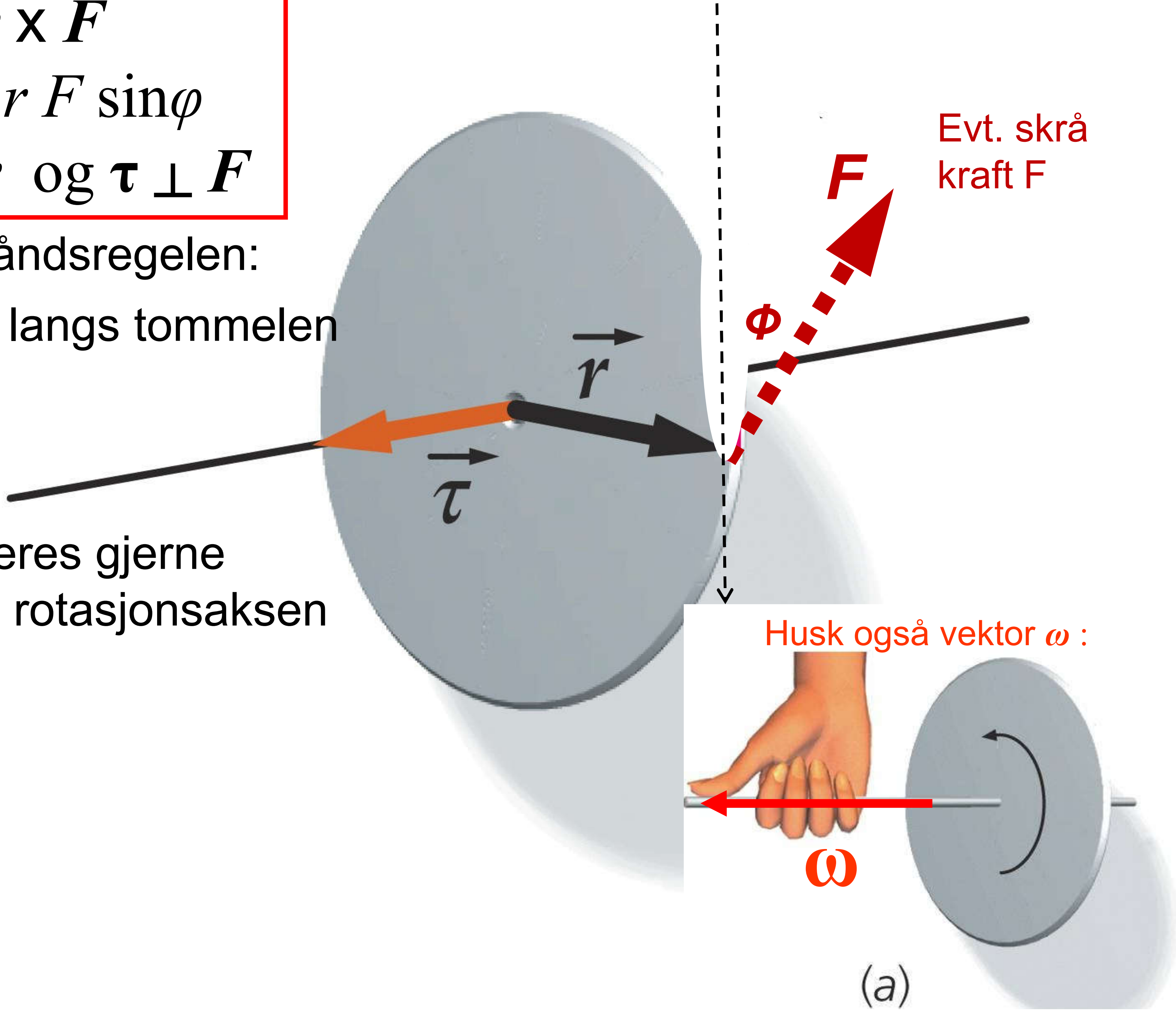
$$|\boldsymbol{\tau}| = r\,F\,\sin\varphi$$

$$\boldsymbol{\tau} \perp \boldsymbol{r} \text{ og } \boldsymbol{\tau} \perp \boldsymbol{F}$$

Høyrehåndsregelen:

$\boldsymbol{\tau}$ peker langs tommelen

$\boldsymbol{\tau}$ plasseres gjerne langs rotasjonsaksen

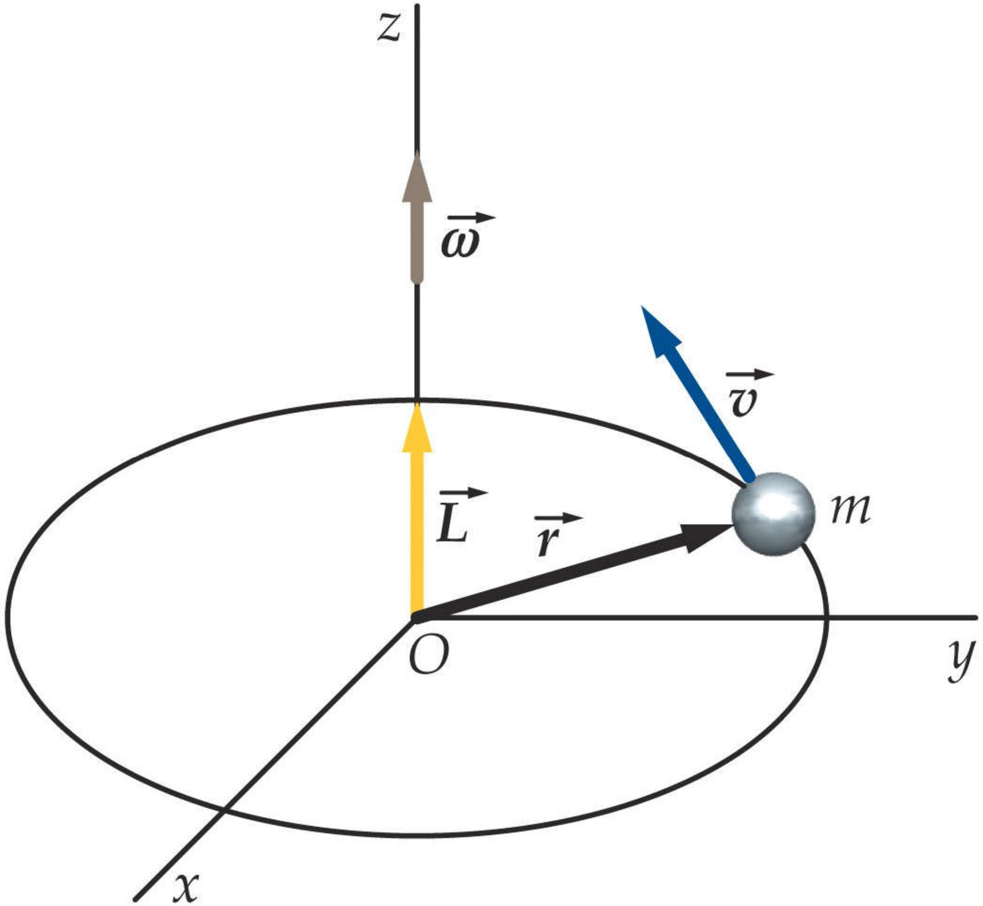


Translasjon:

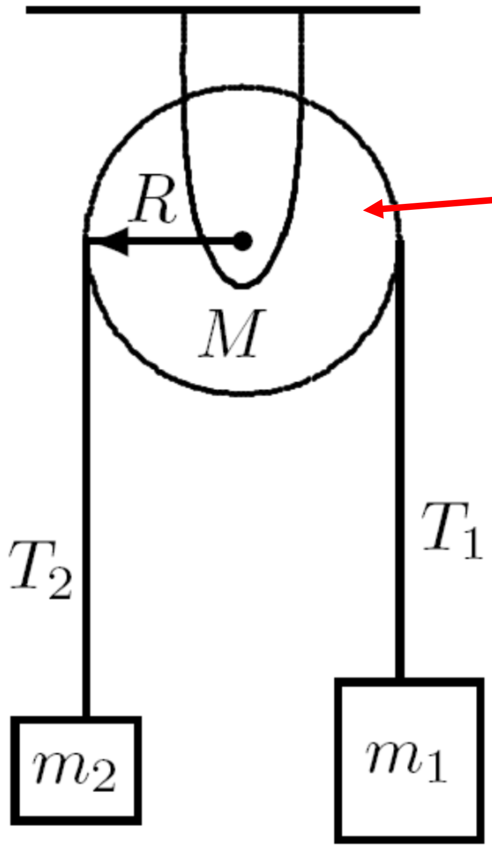
$\boldsymbol{F} = m \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = m \, \boldsymbol{a}$

Rotasjon:

$\boldsymbol{\tau} = I \, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t = I \, \boldsymbol{\alpha}$



Liknende eksempel:
Atwoods (fall)maskin
Øving 5

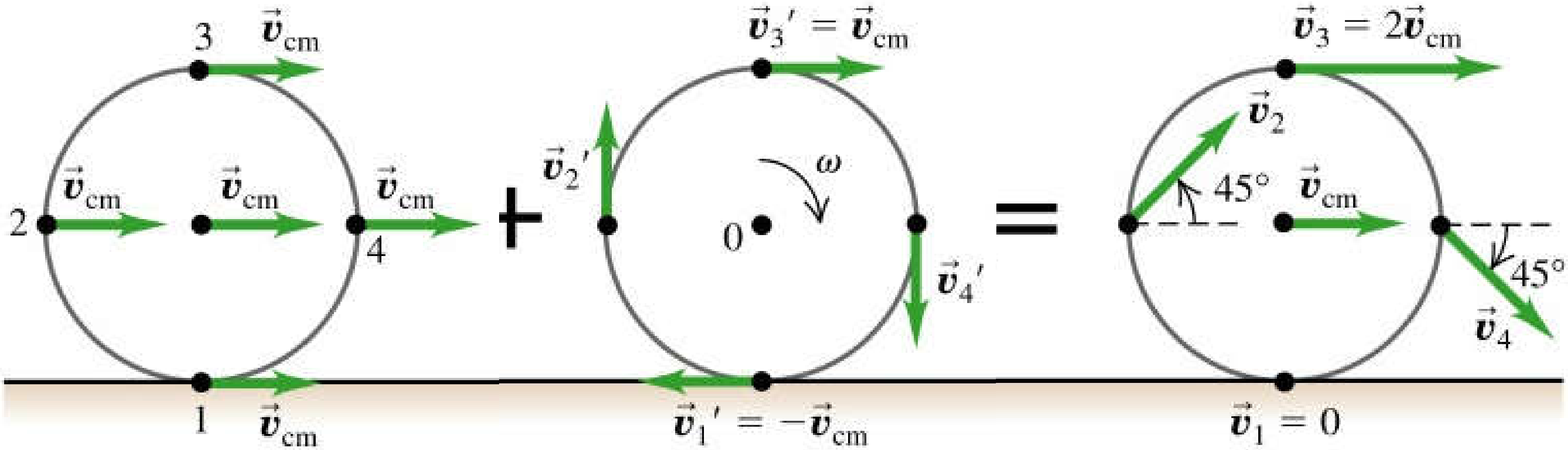


Trinsa med treghetsmoment I skal akselereres i tillegg til akselerasjon av m_2 og m_1

Rulling (uten å glippe) YF 10.3, LL 6.7

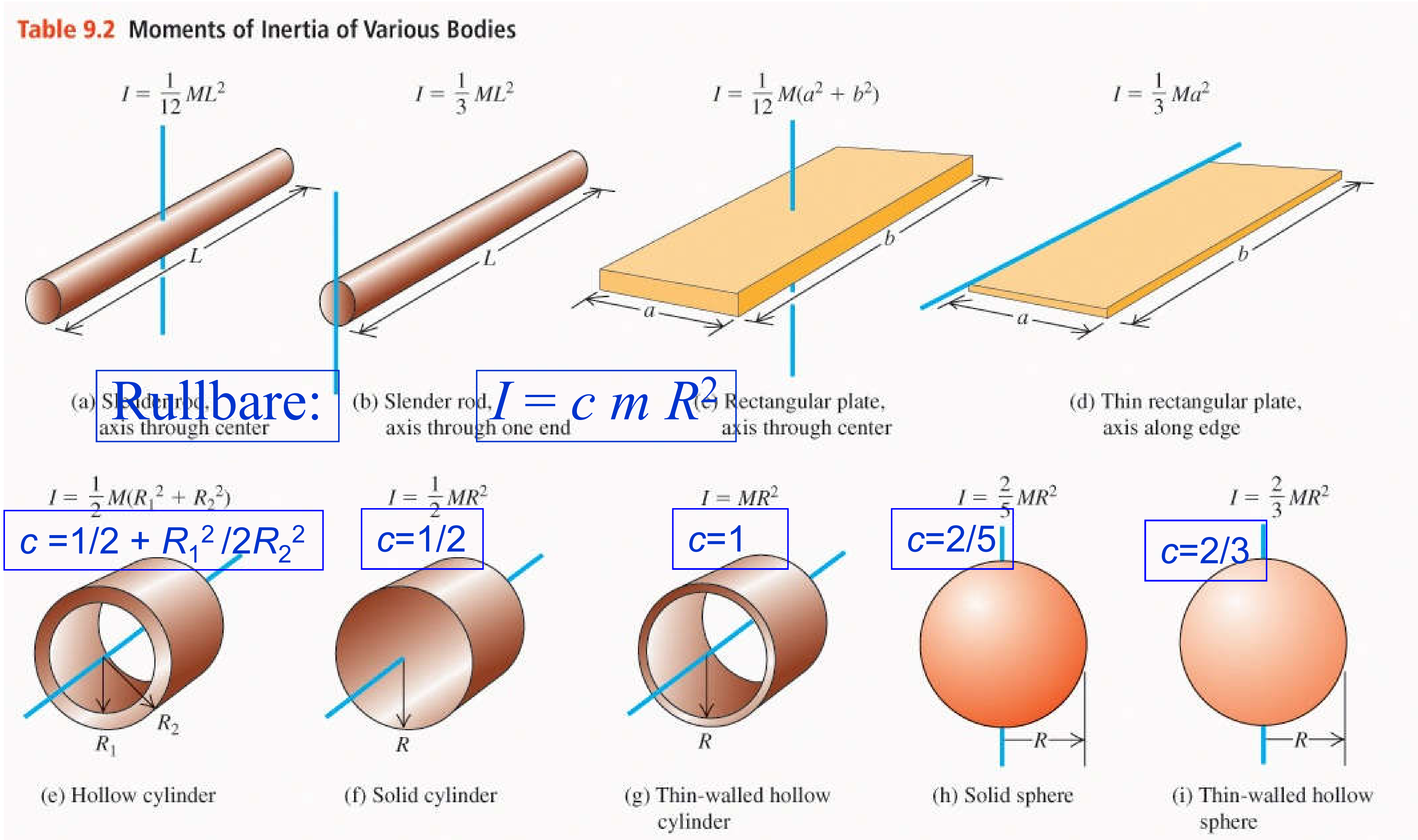
Translasjon + rotasjon = rulling

v ω $\boxed{v_{cm} = \omega r}$



$\frac{1}{2} m v^2 \quad + \quad \frac{1}{2} I\omega^2 \quad = \frac{1}{2} m v^2 (1+c)$

Treghetsmoment ulike skapninger:



Rullbare:

$I = c\ m\ R^2$

$c = 1/2 + R_1{}^2/2R_2{}^2$

$c = 1/2$

$c = 1$

$c = 2/5$

$c = 2/3$

Oppsummering: Rulling

- **Rein rulling:**
- $v = \omega r\ ; \quad a = \alpha r$
  (dvs. translasjonshastighet = banefart til periferien)
- $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} m\, v^2\,(1+c)$
  - med $I = c\, mr^2$ og $\omega = v/r$
- **Statisk** friksjon $F_\mathrm{f} \leq \mu_\mathrm{s} F_\mathrm{N}$ vesentlig for rulling
  og gir vinkelakselerasjon α: $F_\mathrm{f}\, r = I\alpha$

- **Spinne/skli/rutsje (ikke rein rulling):**
- $v \neq \omega\, r$. **Kinetisk** friksjon $F_\mathrm{f} = \mu_\mathrm{k} F_\mathrm{N}$ i retning som prøver å oppnå rein rulling
- Kinetisk friksjon gjør et friksjonsarbeid som endrer kinetisk energi

- Rein rulling: ser vi bort fra energitap (ingen rullemotstand).
- Slure/skli : friksjonsarbeidet er vesentlig.

$E_k = \frac{1}{2}\, m\, v^2\, (1+c)\ =$ lik alle

Størst v for den med minst c

i tregh.momentet $I = c\, mr^2$

Hvilken ruller fortest:

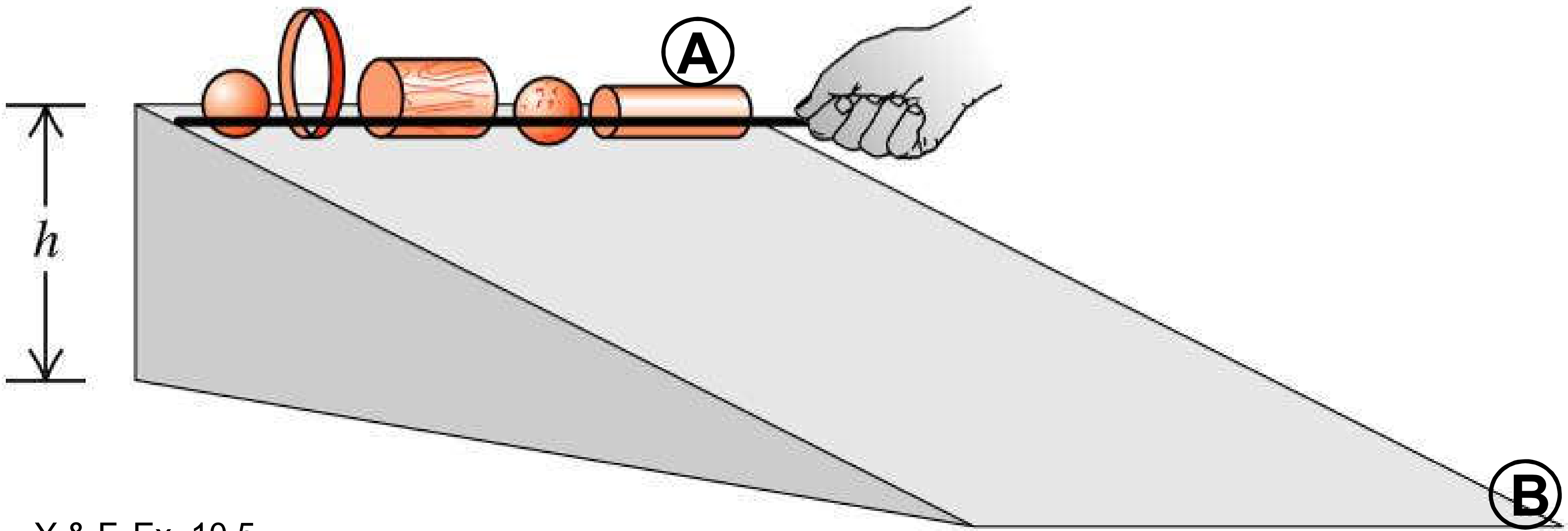
- massiv kule
- ring
- hul sylinder
- hul kule
- massiv sylinder
  - stor eller liten ?

?

raskest	**1.**	**vannfylt flaske**	***c* = ?**
	2.	**massiv kule**	***c* = 2/5**
	3.	**massiv sylinder,**	***c* = 1/2**
	4.	**kuleskall,**	***c* = 2/3**
seinest	**5.**	**hul sylinder = ring,**	***c* = 1**

Uavhengig av størrelsen

(når rulleradius = legemets radius)



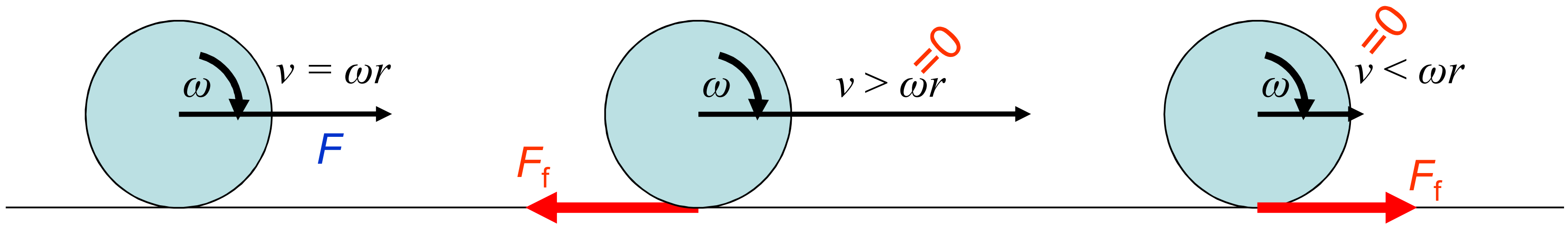
Y & F, Ex. 10.5

Rulle / skli / slure på flatt underlag

Ⓐ Rulle

Ⓑ Skli

Ⓒ Slure



F_f =0 hvis konst v

F_f reduserer v (og øker ω)

F_f øker v (og redus. ω)

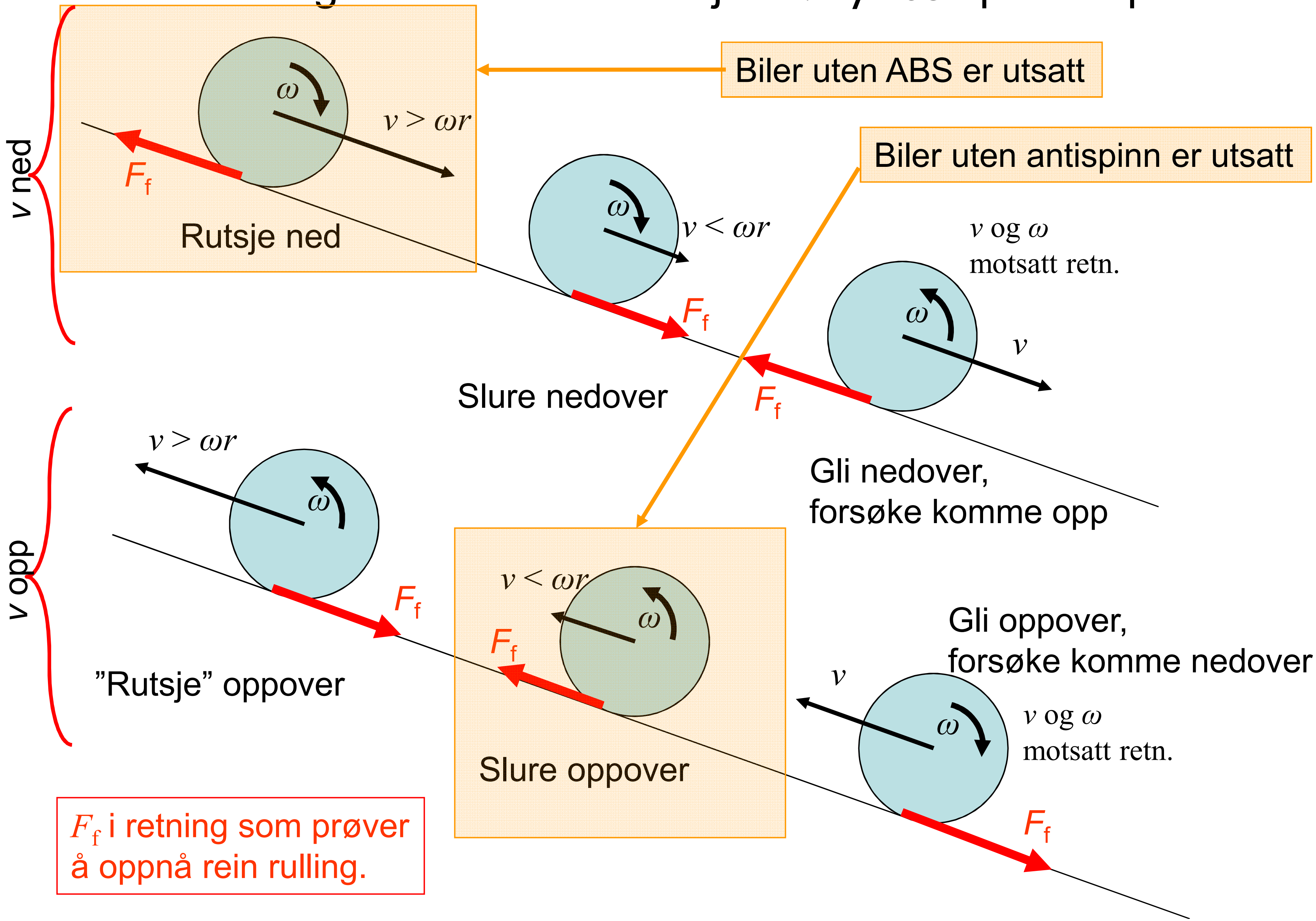
Finne retning for F_f:

1. F_f i retning som prøver å oppnå rein rulling.

eller

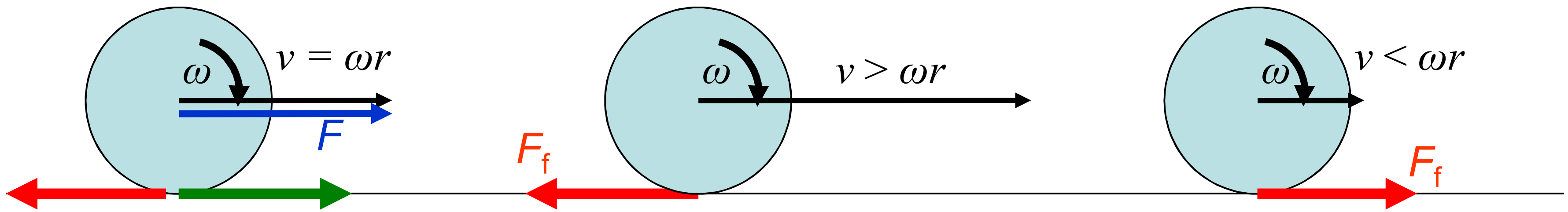
2. Sett minste verdi lik null.

Alle 6 muligheter for kombinasjon $v \neq \omega$ på skråplan



Rulle / skli / slure på flatt underlag

Ⓐ Rulle | Ⓑ Skli | Ⓒ Slure



F_f =0 hvis konst v

F_f reduserer v (og øker ω)

F_f øker v (og redus. ω)

hvis v øker =>
F_f mot venstre for å øke ω

hvis v minker =>
F_f mot høyre for å redusere ω

Hvis ytre kraft F årsak til endring i v

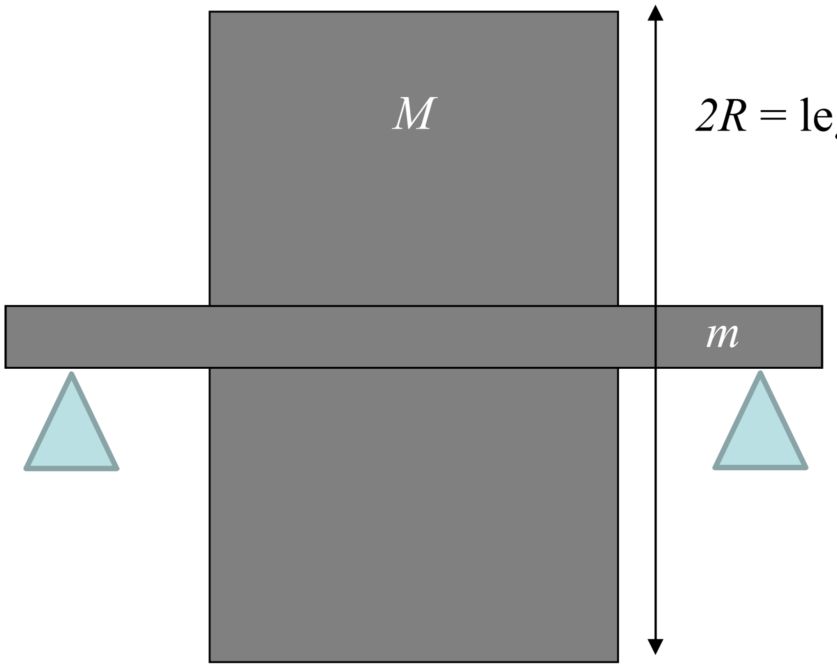
hvis ω øker =>
F_f mot høyre for å øke v (akselererer)

hvis ω minker =>
F_f mot venstre for å minke v (bremser)

Hvis bilmotor/hjulrotasjon årsak til endring i v

(mer avansert)

Rulleradius r $\neq$ legemets radius R



$2R$ = legemets diameter

$2r$ = rullediameter

OBS: rulling: $v = r\,\omega$

$$\begin{aligned} E_k &= \tfrac{1}{2} M v^2 + \tfrac{1}{2} I \omega^2 \\ &= \tfrac{1}{2} M v^2 + \tfrac{1}{4} M R^2 (v/r)^2 \\ &= \tfrac{1}{2} M v^2 \left(1 + \tfrac{1}{2} (R/r)^2 \right) \\ &= \tfrac{1}{2} M v^2 (1 + c) \end{aligned}$$

$I \approx \tfrac{1}{2} M R^2$

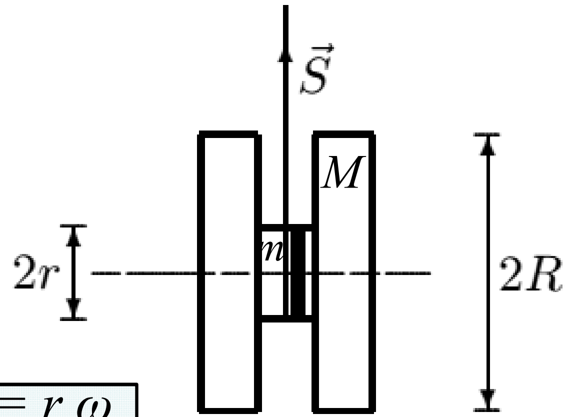
(hvis $r \ll R$ og $m \ll M$)

$$c \gg 1$$

$$E_{k,\text{rot}} \gg E_{k,\text{trans}}$$

Rulleradius r ≠ legemets radius R
Utrulling av jojo, øving 5

rullediameter



«ut»rulling: $v = r\,\omega$

$I \approx ½\, M\, R^2$
(hvis $r << R$ og $m << M$)

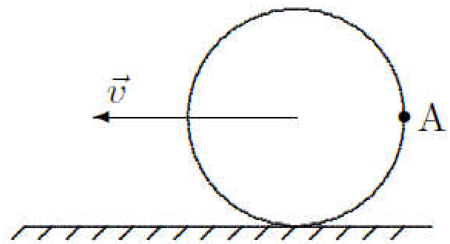
$E_k = ½\, M\, v^2\, (\, 1 + ½\, (R/r)^2)$
$= ½\, M\, v^2\, (\, 1 + c\,)$

c >> 1

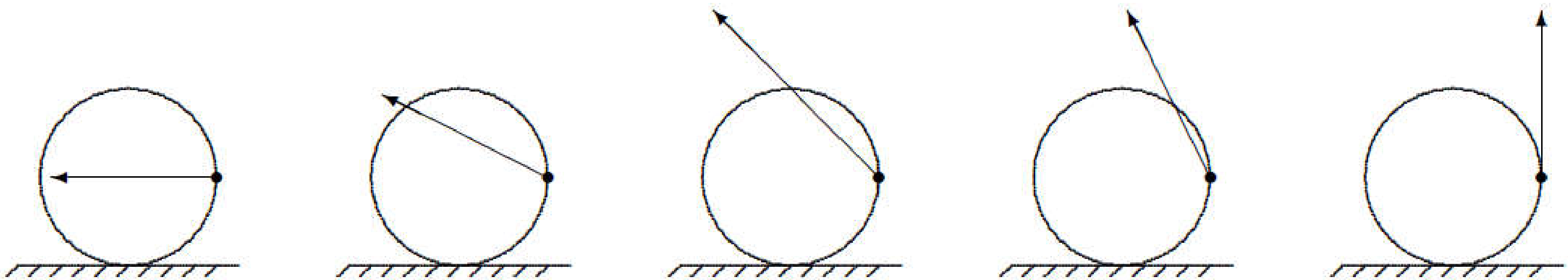
$E_{k,rot} >> E_{k,trans}$

Test

d. Et hjul med radius R ruller på flatt underlag mot venstre med hastighet v. Hvilken av figurene representerer riktig hastighetsvektor for et punkt A på hjulet?



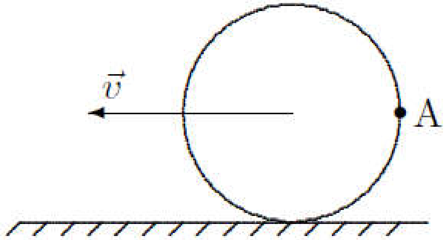
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



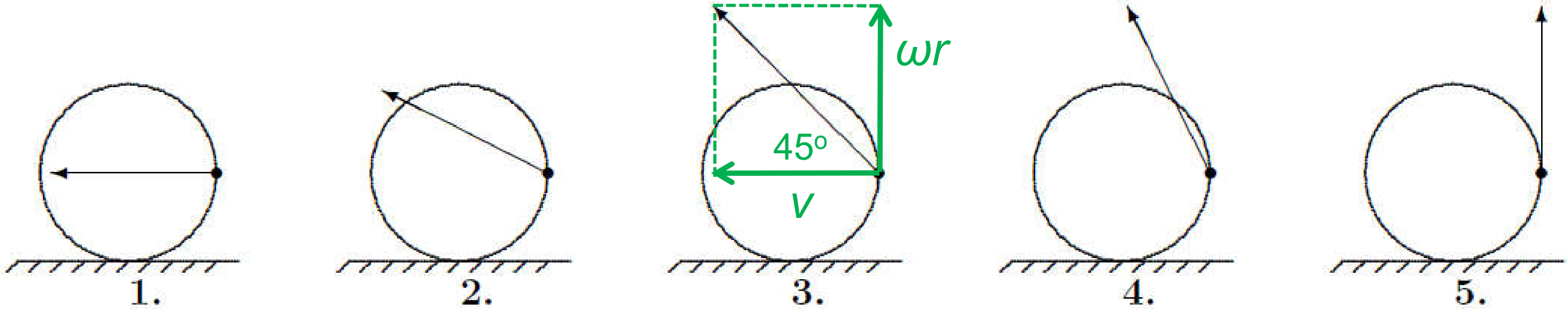
1. **2.** **3.** **4.** **5.**

Test

d. Et hjul med radius R ruller på flatt underlag mot venstre med hastighet v. Hvilken av figurene representerer riktig hastighetsvektor for et punkt A på hjulet?



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



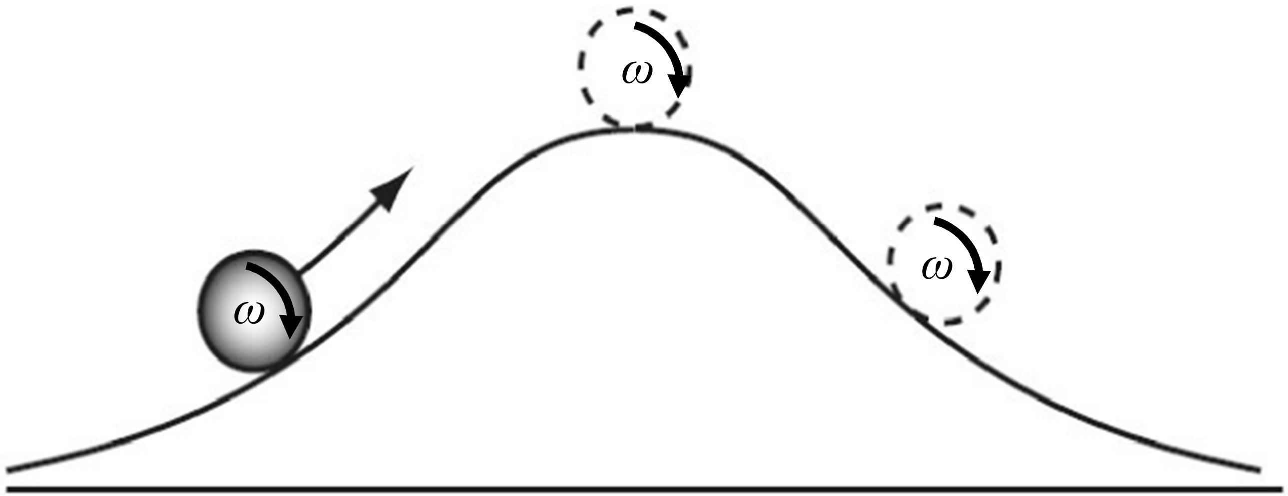
Periferihastighet ωr
= rullehastighet v

Eksamensstatistikk:

A)	4	
B)	9	
C)	67	Riktig
D)	6	
E)	83	
blank	1	
Tot	170	

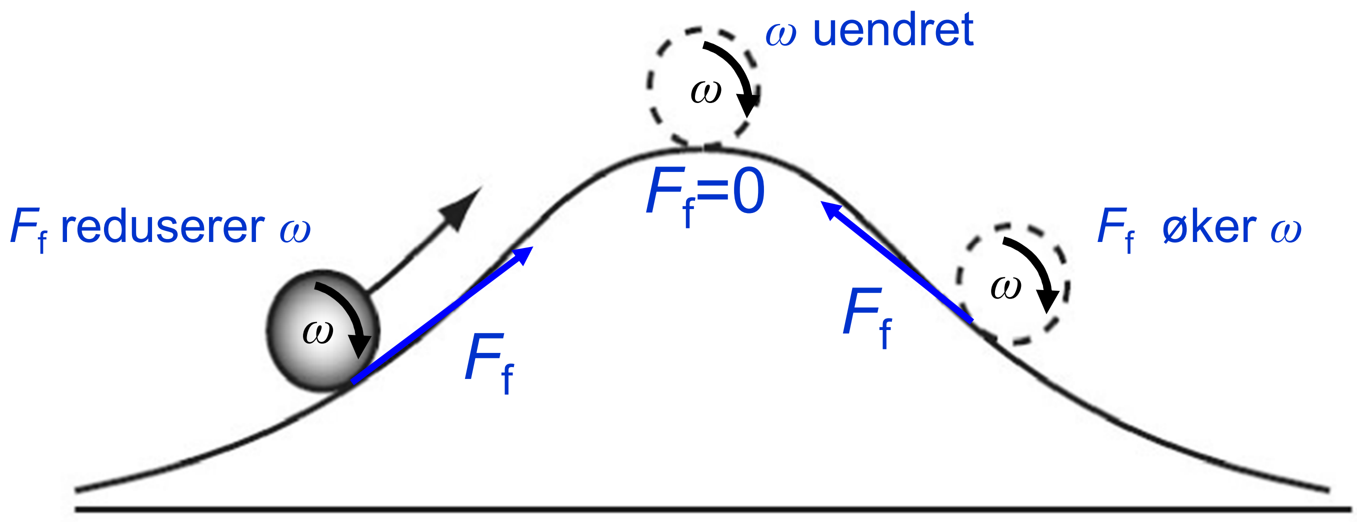
Test

Ei kule triller oppover en bakke, passerer toppen og triller så nedover en bakke på motsatt side. Skissér hvilken retning friksjonen virker fra underlaget på kula, på vei opp, på toppen og på vei ned. Begrunn svaret. Vi antar at vi har rein rulling under hele bevegelsen.



Test

Ei kule triller oppover en bakke, passerer toppen og triller så nedover en bakke på motsatt side. Skissér hvilken retning friksjonen virker fra underlaget på kula, på vei opp, på toppen og på vei ned. Begrunn svaret. Vi antar at vi har rein rulling under hele bevegelsen.



Ytre kraft ($mg \sin\alpha$) endrer v
F_f gir moment til rotasjonen