

# Arbeid og energi. Energibevaring.

- Arbeid =  $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$
- Kinetisk energi  $E_k = \frac{1}{2} m v^2$
- Effekt = arbeid/tid =  $P = dW/dt$
- Arbeid på legeme øker  $E_k$ :  $dW = dE_k$
- Potensiell energi  $E_p(x, y, z)$   
(Tyngdefelt:  $E_p = mgz$ ; Fjærpotensial:  $E_p = \frac{1}{2} k x^2$ )
- Konservativ krefter kan avledes fra pot.energi:

$$\vec{F} = - \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] E_p(x, y, z) = - \vec{\nabla} E_p(x, y, z)$$

(Tyngdekraft:  $\mathbf{F} = -m\mathbf{g}$ ; Fjærkraft:  $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$ )

- $dE_p = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$
- Arbeid av konservativ kraft reduserer tilhørende potensiell energi:  $dW = -dE_p$
- Energibevaring i konservativt felt:

$$d(\frac{1}{2} m v^2 + E_p(x, y, z)) = 0$$

- Energibevaring når friksjon:

$$d(\frac{1}{2} m v^2 + E_p(x, y, z)) = dW_f = \text{friksjonsarbeid} < 0$$

# Konstant-akselerasjonslikninger

Translasjon:  
(konstant akselerasjon  $a$ )

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2as$$

$$s - s_0 = \langle v \rangle t = \frac{1}{2}(v + v_0) t$$

Rotasjon om fast akse:  
(konstant vinkelakselerasjon  $\alpha$ )

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$$

$$\theta - \theta_0 = \langle \omega \rangle t = \frac{1}{2}(\omega + \omega_0) t$$

# Kollisjoner

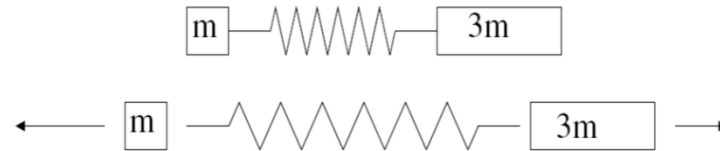
## Vi har sett på:

- Når ingen ytre krefter (i bevegelsesretning):
  - Bevegelsesmengde (impuls) er bevart
- Når ingen ytre kraftmoment om akse A:
  - Spinn er bevart om akse A
- Elastisk støt:
  - Kinetisk energi bevart
- Uelastisk støt:
  - Kinetisk energi avtar (varme).

# Flervalgsoppgave

e. To masser,  $m$  og  $3m$ , ligger på et friksjonsfritt bord på hver sin side av en spent fjær. Når fjærlåsen åpnes, skyves de to massene i hver sin retning. Hvordan fordeles den potensielle energien i den spente fjæra på kinetisk energi til de to massene?

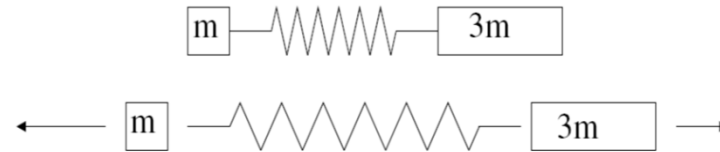
- A 25 % på  $m$ , 75 % på  $3m$
- B 75 % på  $m$ , 25 % på  $3m$
- C 10 % på  $m$ , 90 % på  $3m$
- D 90 % på  $m$ , 10 % på  $3m$
- E 50 % på  $m$ , 50 % på  $3m$



# Flervalgsoppgave

e. To masser,  $m$  og  $3m$ , ligger på et friksjonsfritt bord på hver sin side av en spent fjær. Når fjærlåsen åpnes, skyves de to massene i hver sin retning. Hvordan fordeles den potensielle energien i den spente fjæra på kinetisk energi til de to massene?

- A 25 % på  $m$ , 75 % på  $3m$
- B 75 % på  $m$ , 25 % på  $3m$
- C 10 % på  $m$ , 90 % på  $3m$
- D 90 % på  $m$ , 10 % på  $3m$
- E 50 % på  $m$ , 50 % på  $3m$



e. B. Bevaring av bevegelsesmengde gir forholdet mellom hastighetene til de to massene, og dermed forholdet mellom deres kinetiske energi:

$$\begin{aligned}0 &= p_1 + p_3 = mv_1 + 3mv_3 \\ \Rightarrow \frac{v_1}{v_3} &= -3 \\ \Rightarrow \frac{mv_1^2/2}{3mv_3^2/2} &= 3\end{aligned}$$

Følgelig 75% kinetisk energi på  $m$  og 25% på  $3m$ .

# Flervalgsoppgave

**i.** Tre jenter står på ytterkanten av en karusell som roterer med en vinkelhastighet  $\omega$  og rotasjonen er friksjonsfri. Under rotasjonen går jentene rolig inn mot sentrum av karusellen (se figuren). Under bevegelsen vil det totale spinn  $L$  om karusellens aksling og den totale kinetiske energi  $E$  til karusellen + jentene endre seg slik:

- A)  $L$  øker og  $E$  øker
- B)  $L$  øker og  $E$  uendra
- C)  $L$  uendra og  $E$  øker
- D)  $L$  uendra og  $E$  uendra
- E)  $L$  uendra og  $E$  avtar



# Flervalgsoppgave

i. Tre jenter står på ytterkanten av en karusell som roterer med en vinkelhastighet  $\omega$  og rotasjonen er friksjonsfri. Under rotasjonen går jentene rolig inn mot sentrum av karusellen (se figuren). Under bevegelsen vil det totale spinn  $L$  om karusellens aksling og den totale kinetiske energi  $E$  til karusellen + jentene endre seg slik:

- A)  $L$  øker og  $E$  øker
- B)  $L$  øker og  $E$  uendra
- C)  $L$  uendra og  $E$  øker
- D)  $L$  uendra og  $E$  uendra
- E)  $L$  uendra og  $E$  avtar

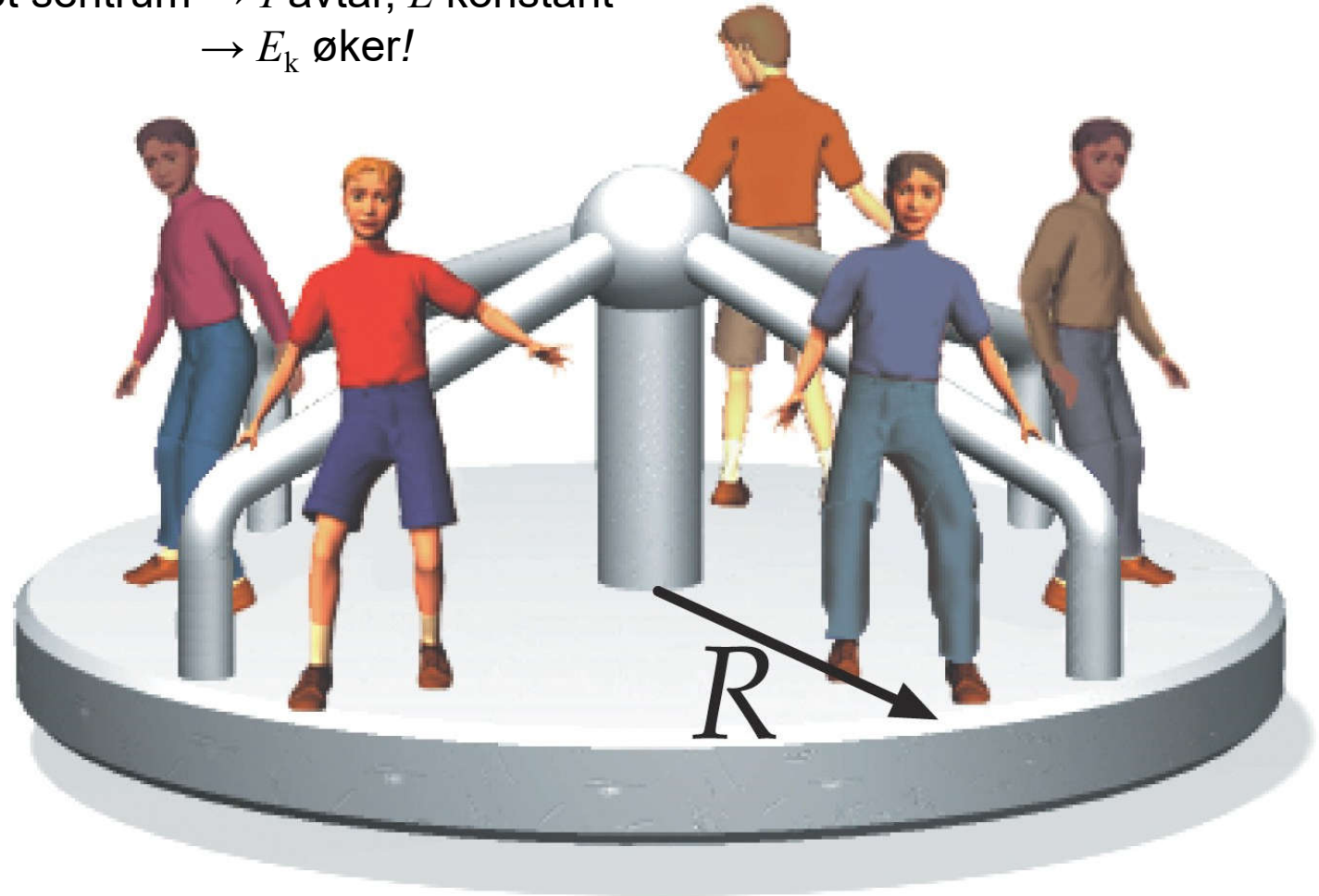


Spinn:  $L = I \omega$  **Konstant!**

Personer inn mot sentrum  $\rightarrow I = \sum m_i r_i^2$  avtar  
 $\rightarrow \omega$  må øke!

Kinetisk energi:  $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} L \omega = \frac{1}{2} L^2 / I$

Personer inn mot sentrum  $\rightarrow I$  avtar,  $L$  konstant  
 $\rightarrow E_k$  øker!

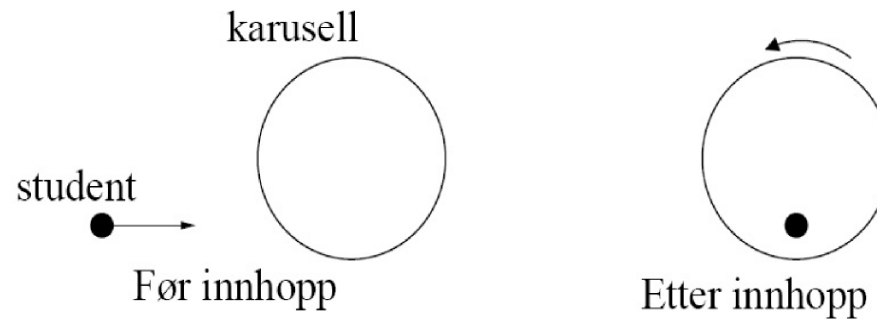




# Flervalgsoppgave

**b.** En student tar fart og hopper på en karusell som dermed begynner å rotere (tilnærmet friksjonsfritt) omkring en aksling som står fast i bakken, og som passerer gjennom karusellens sentrum. For systemet karusell + student, hvilke(n) størrelse(r) endrer seg *ikke* fra før til etter studentens innhopp på karusellen? (Her er  $E$  systemets energi,  $p$  systemets bevegelsesmengde og  $L$  systemets spinn mhp. en akse gjennom karusellens sentrum.)

- A) Bare  $L$
- B)  $L$  og  $E$
- C)  $L$  og  $p$
- D)  $L$ ,  $E$  og  $p$
- E) Bare  $p$



# Flervalgsoppgave

**b.** En student tar fart og hopper på en karusell som dermed begynner å rotere (tilnærmet friksjonsfritt) omkring en aksling som står fast i bakken, og som passerer gjennom karusellens sentrum. For systemet karusell + student, hvilke(n) størrelse(r) endrer seg *ikke* fra før til etter studentens innhopp på karusellen? (Her er  $E$  systemets energi,  $p$  systemets bevegelsesmengde og  $L$  systemets spinn mhp. en akse gjennom karusellens sentrum.)

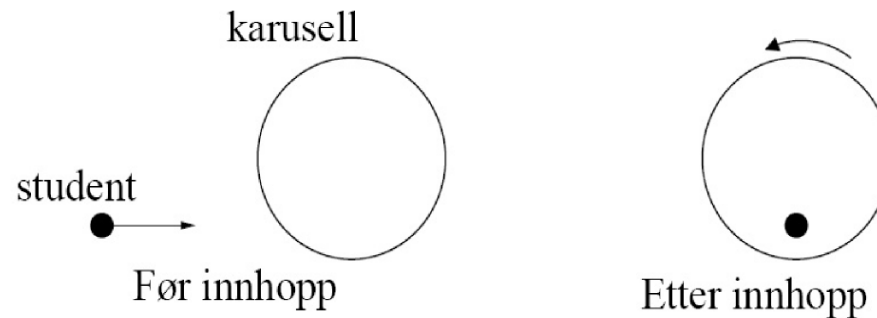
A) Bare  $L$

B)  $L$  og  $E$

C)  $L$  og  $p$

D)  $L$ ,  $E$  og  $p$

E) Bare  $p$



$E$  bevart? Nei: fullstendig uelastisk støt (sitter sammen etter støtet)

$p$  bevart? Nei:  $p_{\text{etter}} = 0$  (ingen translasjon). Eller:  $F_{\text{ytre}}$  fra akslingen

$L$  bevart? Ja:  $F_{\text{ytre}}$  virker i akslingen, og har derfor ingen moment:  $\tau_{\text{ytre}} = 0$

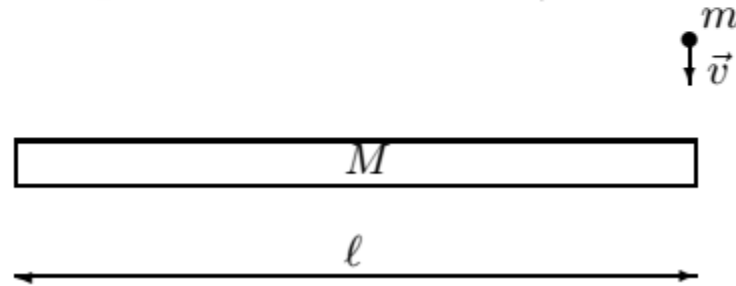
**b.** A. Landingen på karusellen er et uelastisk støt, så (mekanisk) energi  $E$  for systemet kan ikke være bevart. Akslingen som står fast i bakken, virker på systemet med en kraft når studenten lander. Dermed kan heller ikke systemets bevegelsesmengde  $p$  være bevart. Men denne kraften fra akslingen representerer ikke noe kraftmoment mhp. en akse gjennom karusellens sentrum, slik at spinn  $L$  er bevart.

# Flervalgsoppgave

## Eks. des 2012, opg. 1 f.

**f.** En stav med masse  $M$  og lengde  $\ell$  ligger på et horisontalt bord og staven kan dreies og forskyves friksjonsfritt på bordet. I figuren er staven sett ovenfra. Ei pistolkule med masse  $m$  og horisontal fart  $v$  i retning  $90^\circ$  på stavens lengderetning, treffer stavens endepunkt og absorberes straks i stavmaterialet. Derved settes staven (med kule) i bevegelse. For systemet staven + kule, hvilke(n) størrelse(r) endrer seg *ikke* fra før til etter kollisjonen? (Her er  $E$  systemets energi,  $p$  systemets bevegelsesmengde og  $L$  systemets spinn mhp. stavens massesenter.)

- A)  $L$  og  $E$
- B)  $L$  og  $p$
- C)  $L$ ,  $E$  og  $p$
- D) Bare  $L$
- E) Bare  $p$

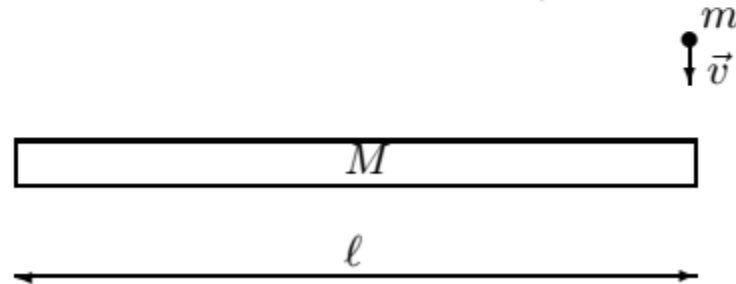


# Flervalgsoppgave

## Eks. des 2012, opg. 1 f.

**f.** En stav med masse  $M$  og lengde  $\ell$  ligger på et horisontalt bord og staven kan dreies og forskyves friksjonsfritt på bordet. I figuren er staven sett ovenfra. Ei pistolkule med masse  $m$  og horisontal fart  $v$  i retning  $90^\circ$  på stavens lengderetning, treffer stavens endepunkt og absorberes straks i stavmaterialet. Derved settes staven (med kule) i bevegelse. For systemet staven + kule, hvilke(n) størrelse(r) endrer seg *ikke* fra før til etter kollisjonen? (Her er  $E$  systemets energi,  $p$  systemets bevegelsesmengde og  $L$  systemets spinn mhp. stavens massesenter.)

- A)  $L$  og  $E$
- B)  $L$  og  $p$
- C)  $L$ ,  $E$  og  $p$
- D) Bare  $L$
- E) Bare  $p$



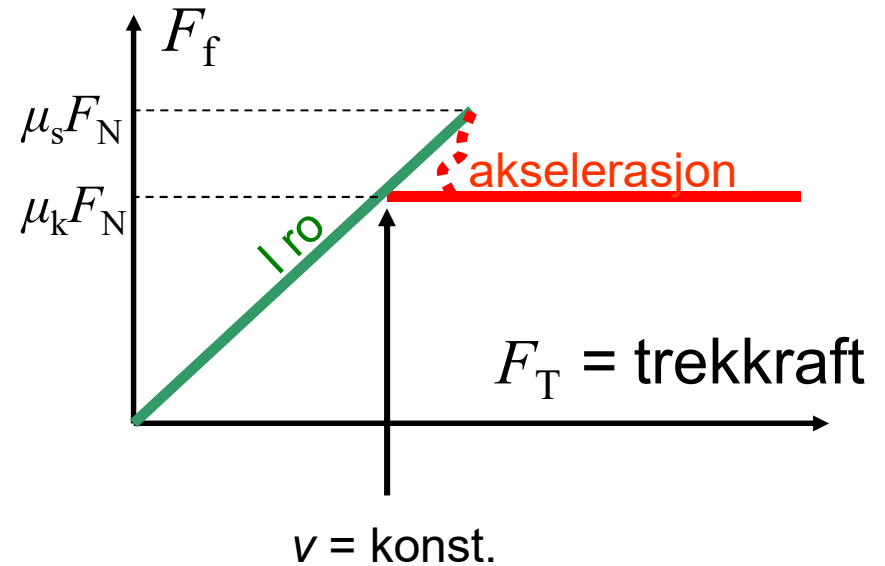
INGEN ytre kraft =  $p$  og  $L$  bevart

# Friksjon:

- Friksjon:

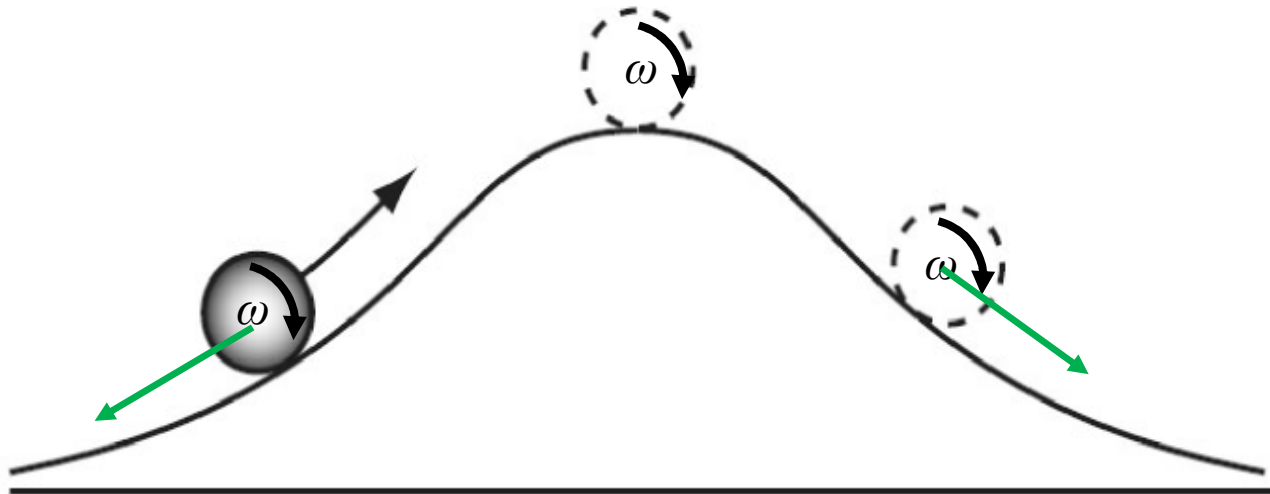
- Hvilefriksjon  $F_T = F_f \leq F_{f,\max}$   
( $F_f \ll \text{ukjent}$ )  $F_{f,\max} = \mu_s F_N$

- Glidefriksjon:  $F_T \geq F_f = \mu_k F_N$   
( $F_f \ll \text{kjent}$ ) dvs. konstant)



# Oppgave

Ei kule triller oppover en bakke, passerer toppen og triller så nedover en bakke på motsatt side. Skissér hvilken retning friksjonen virker fra underlaget på kula, på vei opp, på toppen og på vei ned. Begrunn svaret. Vi antar at vi har rein rulling under hele bevegelsen.

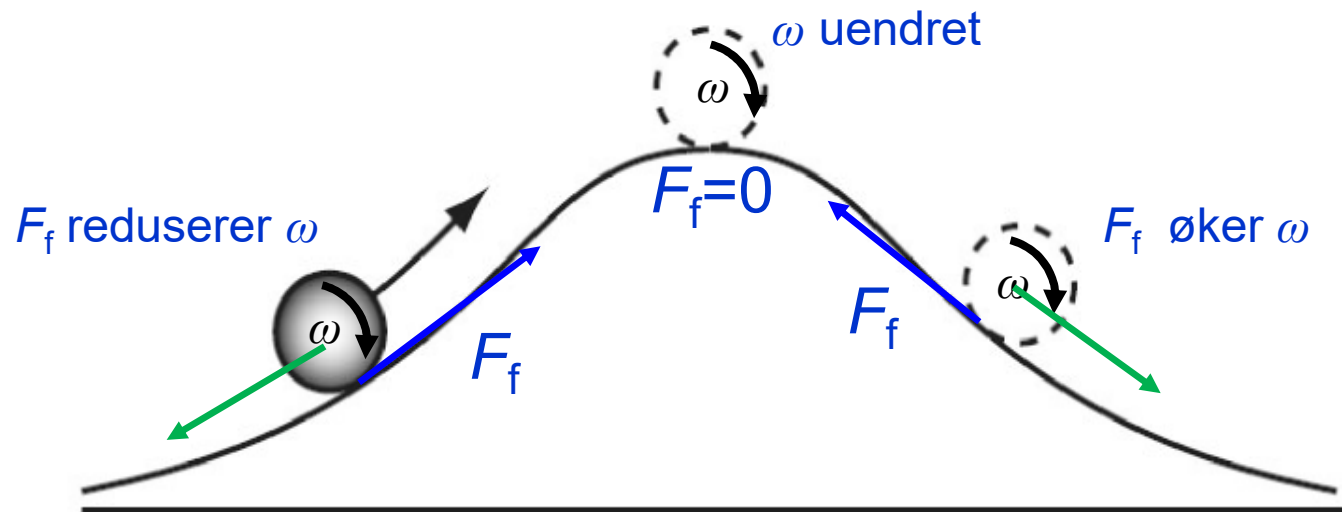


$mg \sin \alpha$  endrer  $v$

$F_f$  gir moment til rotasjonen

# Oppgave

Ei kule triller oppover en bakke, passerer toppen og triller så nedover en bakke på motsatt side. Skissér hvilken retning friksjonen virker fra underlaget på kula, på vei opp, på toppen og på vei ned. Begrunn svaret. Vi antar at vi har rein rulling under hele bevegelsen.



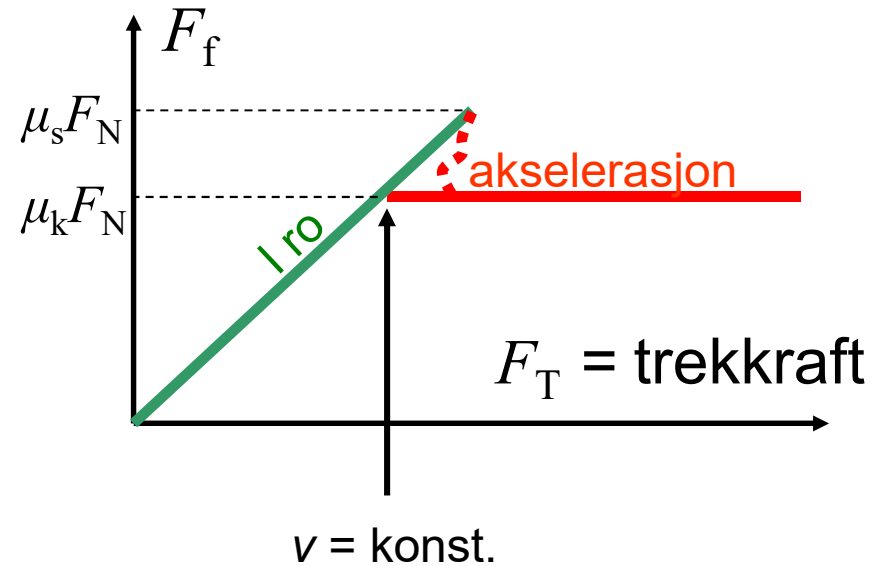
$mg \sin \alpha$  endrer  $v$   
 $F_f$  gir moment til rotasjonen

# Friksjon:

- Friksjon:

- Hvilefriksjon  $F_T = F_f \leq F_{f,\max}$   
( $F_f \ll \text{ukjent}$ )  $F_{f,\max} = \mu_s F_N$

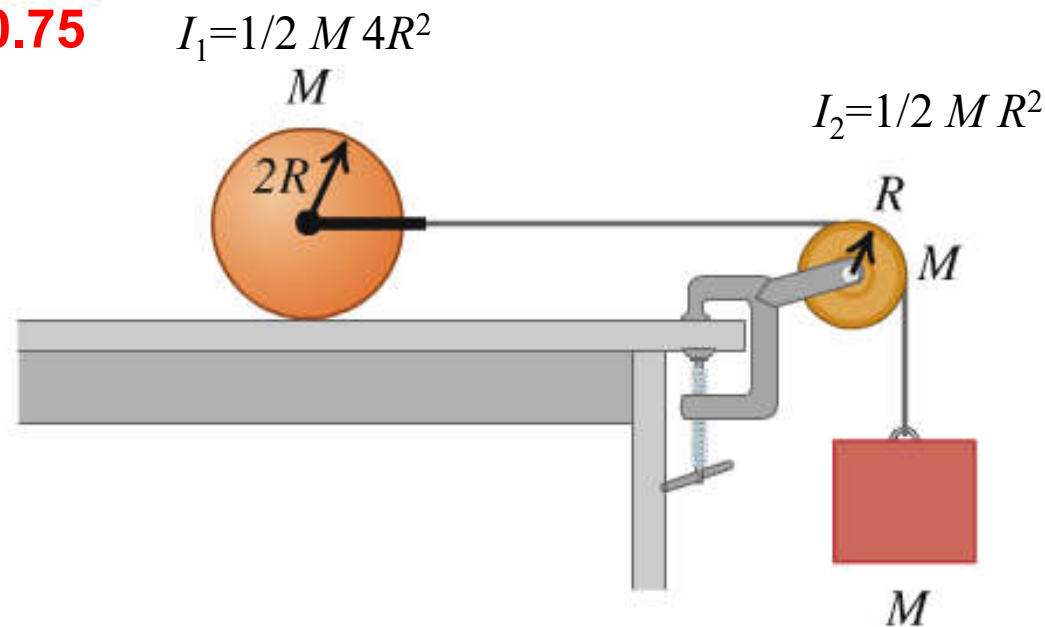
- Glidefriksjon:  $F_T \geq F_f = \mu_k F_N$   
( $F_f \ll \text{kjent}$ ) dvs. konstant)





Y&F Opg. ~~10.87~~ • A uniform solid cylinder with mass  $M$  and radius  $2R$  rests on a horizontal tabletop. A string is attached by a yoke to a frictionless axle through the center of the cylinder so that the cylinder can rotate about the axle. The string runs over a disk-shaped pulley with mass  $M$  and radius  $R$  that is mounted on a frictionless axle through its center. A block of mass  $M$  is suspended from the free end of the string (Fig. P10.87). The string doesn't slip over the pulley surface, and the cylinder rolls without slipping on the tabletop. Find the magnitude of the acceleration of the block after the system is released from rest.

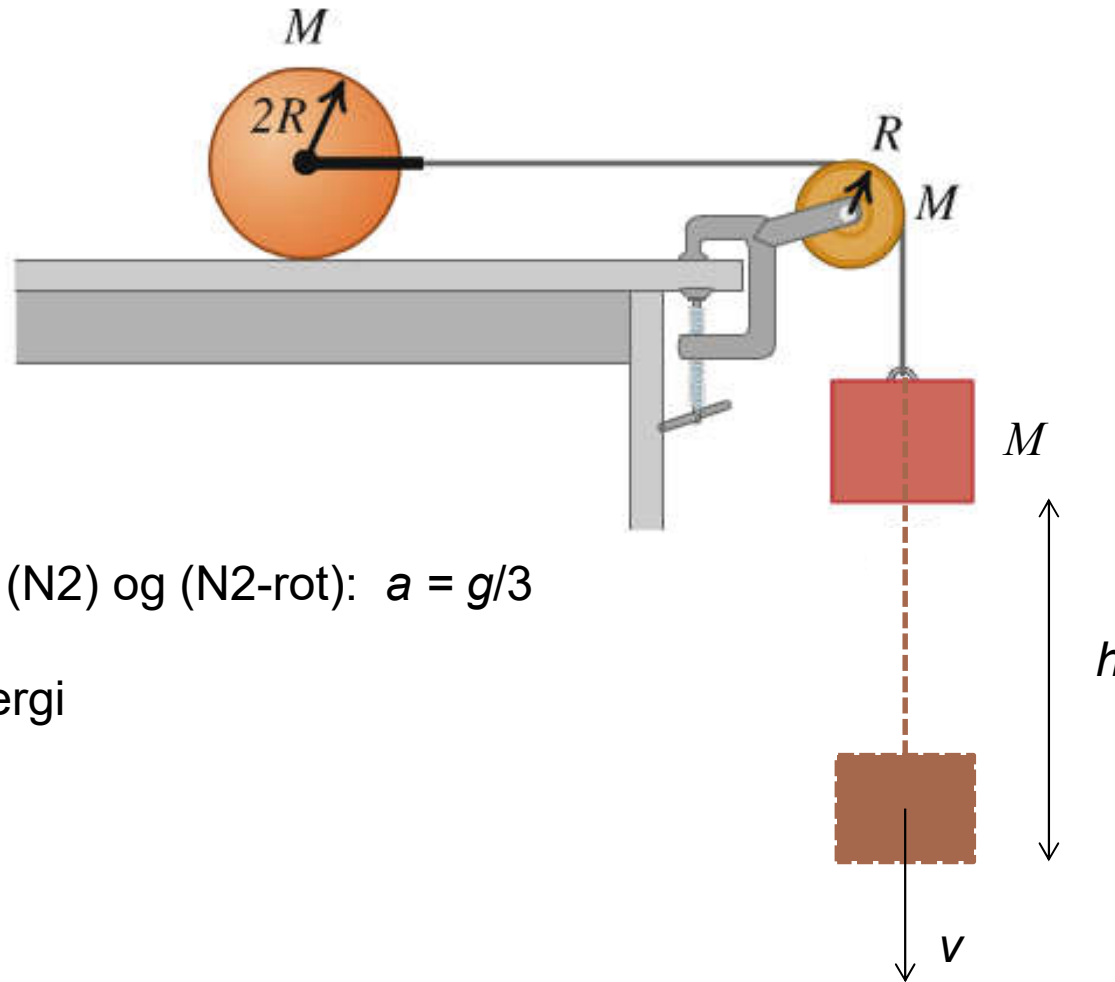
Figure ~~P10.87~~  
P10.75



Y&F Opg.

**P10.75**

Figure ~~P10.87~~



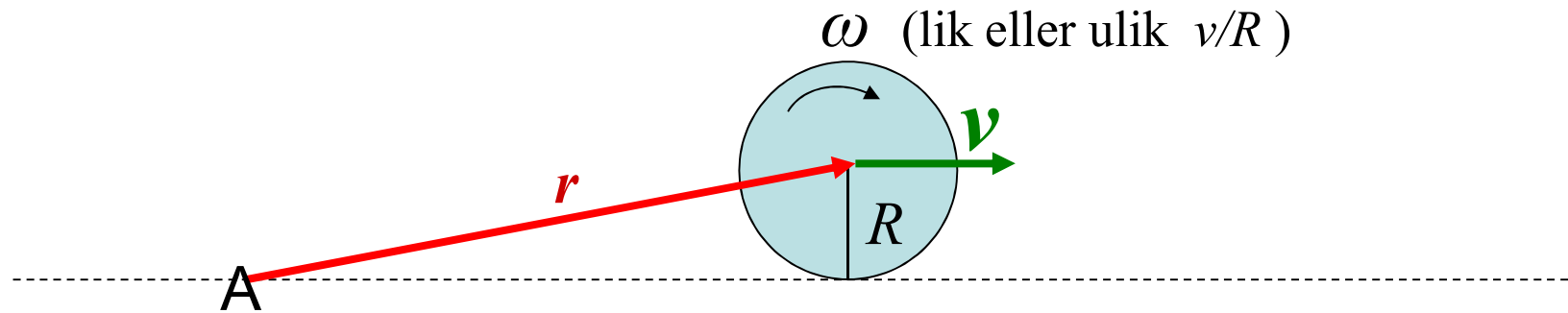
Vi fant med (N2) og (N2-rot):  $a = g/3$

Nå med energi

## Eksamen TFY4115 des 2011, opg. 2

Oppgave	Snittresultat	Vektlegging (totalt 30)
2a	<b>58 %</b>	8
2b	90 %	4
2c	79 %	6
2d	<b>58 %</b>	6
2e	<b>34 %</b>	6

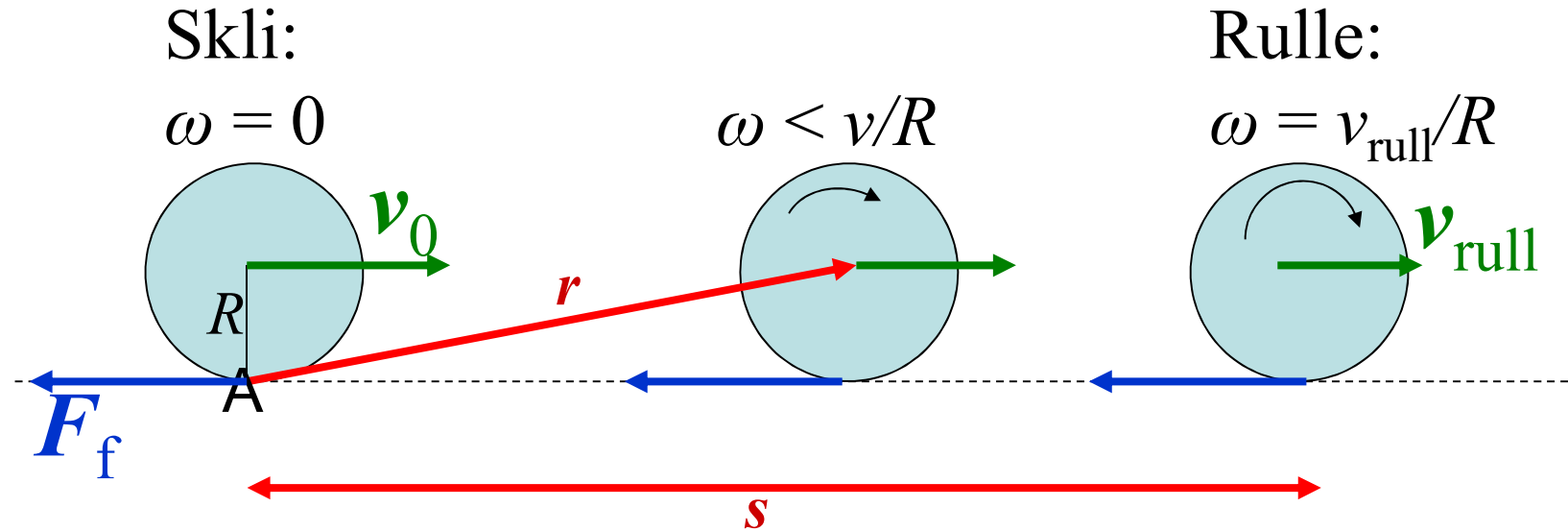
# Totalt spinn – ved rulling og skliing.



(Totalt) spinn om A:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_A &= \mathbf{r} \times m \mathbf{v} + I_0 \boldsymbol{\omega} \\ &= \text{banespinn} + \text{egenspinn} \end{aligned}$$

# Bowlingkule (liknende i Ø7, opg. 1)



Om A:  $L_A = \mathbf{r} \times m \mathbf{v} + I_0 \boldsymbol{\omega}$

Ingen krefter har moment

$$\Rightarrow L_A = \text{konst.} = mrv_0$$

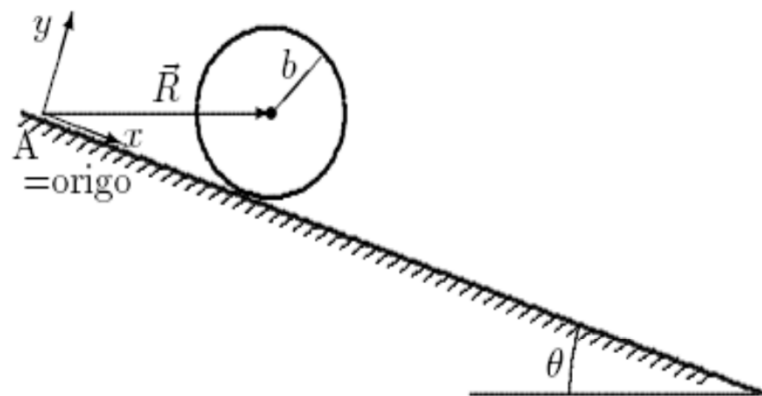
$$L_{\text{start}} = L_{\text{slutt}} \Rightarrow v_{\text{rull}} = v_0 \cdot 5/7 \quad (*) \quad \text{-- uten å kjenne } F_f !$$

# Øving 7.

## Oppgave 1. Bruk av totalt spinn

Figuren viser ei kule med masse  $m$  og radius  $b$  som ruller nedover et skråplan med helning  $\theta$ .

Vi har i forelesningene funnet akselerasjon  $a$  og friksjonskrafta  $F_f$  for kula ved å bruke Newton 2 langs skråplanet og spinnsatsen om *akse gjennom kulas massesenter*. Vi skal nå alternativt finne  $a$  ved å velge referansepunkt A (aksen for moment) på skråplanet ovenfor kula. I forelesningseksempel med slurende/rullende bowlingkule ble det på samme måte brukt referansepunktet i et punkt på bakken. Fordelen er da at vi kan bestemme  $a$  uten å vite friksjonskrafta  $F_f$ . Oppgaven er en god hjelp til den noe vanskeligere oppgaven om biljardkule lenger nede.



Vi legger inn et koordinatsystem  $xy$  som vist i figuren med  $x$  parallell med skråplanet og  $z$ -aksen opp av papirplanet. Spinnet om A blir

$$\vec{L} = m\vec{R} \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}.$$

## Translasjon:

Bevegelsesmengde  
(linear momentum):

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v}$$

N2-trans:

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$$

”Stivt” legeme (konst.  $m$ ):

$$\mathbf{F} = m d\mathbf{v}/dt = m \mathbf{a}$$

$$\mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{p} = \text{konstant (N1)}$$

”stivt” legeme:  $\mathbf{v} = \text{konst}$

## Rotasjon:

Spinn

(angular momentum):

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v}$$

$$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega} \text{ Stivt legeme om sym.akse}$$

N2-rot (spinnsetsen):

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$$

Stivt legeme om sym.akse (konst.  $I$ ):

$$\boldsymbol{\tau} = I d\boldsymbol{\omega}/dt = I \boldsymbol{\alpha}$$

$$\boldsymbol{\tau} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \text{konstant (N1-rot)}$$

stivt legeme om sym.akse:  $\boldsymbol{\omega} = \text{konst}$

## 6. Mekaniske svingninger. Oppsummering 1

- **6.1 Udempet harmonisk oscillasjon (SHM)**

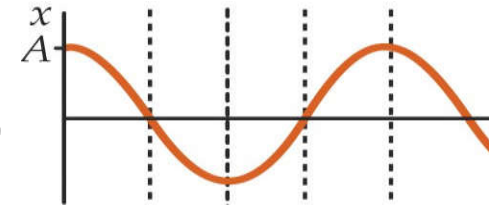
Kriterium SHM: **Krafta som trekker mot likevekt**

**er prop. med avstand  $x$  (eks.  $F = -kx$ )**

Dette gir fra Newton 2:  $d^2/dt^2 x + \omega_0^2 x = 0$

med løsning:  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

- masse/fjær:  $\omega_0^2 = k/m$
- tyngpendel (matematisk):  $\omega_0^2 = g/l$
- fysisk pendel:  $\omega_0^2 = mgl/I$  (seinere)

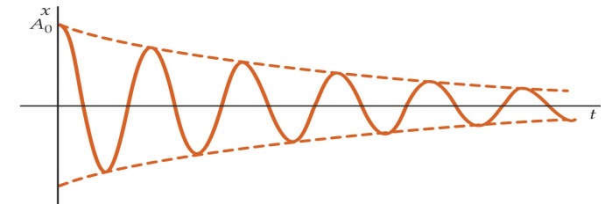


- **6.2 Dempet harmonisk oscillasjon**

$d^2/dt^2 x + 2\gamma d/dt x + \omega_0^2 x = 0$

med løsning:  $x(t) = A e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_d t + \varphi)$

(svak dempning  $\gamma < \omega_0$ )  $\omega_d^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$





# Eksamen des 2016.

## Statistikk (prosent riktig).

1. Flervalgs.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Mekanikk:	61	95	32	44	52	79	32	82	75	58	86	63
Termisk:	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	52	78	86	85	57	52	79	61	65	42	65	78

Mekanikk:	2a	2b	2c	3a	3b	3c	3d
	96	71	66	80	76	77	56

Termisk:	4a	4b	4c	4d	5	<b>Gjennomgå oppgaver markert rødt (dårligst besvarte)</b>
	94	80	62	68	42	

Karakterskala:



Eksamen TFY4115 des 2016, opg. 1

Flervalgs - de dårligst besvarte:

Oppgave	Snittresultat	
1-3	32 %	Mekanikk
1-4	44 %	
1-5	52 %	
1-7	32 %	
1-10	58 %	
1-13	52 %	Termisk
1-17	57 %	
1-18	52 %	
1-20	61 %	
1-22	42 %	
1-23	65 %	

Avgitte svar:

Opg:	3	4	5	7	10	13	17	18	20	22	23
<b>Rett svar</b>											
A	65	2	17	12	9	1	116	22	130	95	9
B	23	98	115	53	21	38	10	7	45	9	27
C	29	111	5	17	18	113	18	27	7	92	144
D	42	4	12	13	21	44	3	12	5	1	17
E	29	4	61	58	126	6	18	108	1	14	12
blank	39	8	17	74	32	25	62	51	39	16	18
Sum	227	227	227	227	227	227	227	227	227	227	227
Snittres. %	32	44	52	32	58	52	57	52	61	42	65

# Eksamen des 2015.

## Statistikk (prosent riktig).

1. Flervalgs.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Mekanikk:	90	79	89	78	82	87	69	78	45	52	36	63
Termisk:	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	87	54	51	32	73	88	62	47	72	74	61	55

Mekanikk:	2a	2b	2c	3a	3b	3c	3d
	96	82	84	72	65	58	27

Termisk:	4a	4b	4c	4d	4e
	83	73	49	52	66

**Gjennomgå oppgaver  
markert rødt  
(dårligst besvarte)**

Karakterskala:



Eksamen TFY4115 des 2015, opg. 1

Flervalgs - de dårligst besvarte:

Oppgave	Snittresultat	
1-9	45 %	Mekanikk
1-10	52 %	
1-11	<b>36 %</b>	
1-14	54 %	Termisk
1-15	51 %	
1-16	<b>32 %</b>	
1-20	47 %	
1-23	61 %	
1-24	55 %	

Avgitte svar:

**Rett svar**

Opg:	9	10	11	14	15	16	20	23	24
A	43	20	73	11	36	67	18	3	31
B	85	39	43	72	108	65	16	4	5
C	4	115	54	119	1	25	20	29	1
D	12	13	14	4	39	29	98	125	5
E	3	32	6	3	9	6	34	7	108
blank	78	6	35	16	32	33	39	57	75
Sum	225	225	225	225	225	225	225	225	225
Snittres. %	45	52	36	54	51	32	47	61	55