

# Varmetransport

(Y&F 17.7+39.5, L&H&L 18.1+2+4)

2. hovedsetning: Varme fra varmt til kaldt legeme  
(og fra varm til kald del av et legeme)

Ulike typer transport:

*Innen et legeme:*

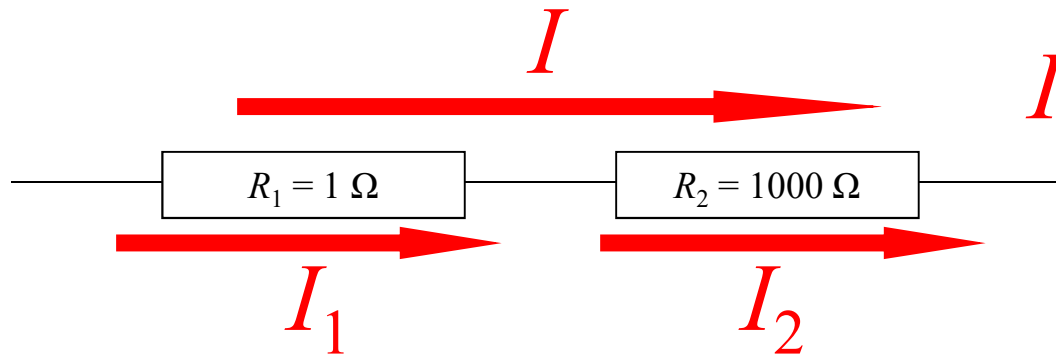
1. Varmeledning, Fouriers lov
2. Konveksjon (strømning)

*Mellom legemer:*

3. Varmeovergang (mellom ulike legemer)
4. Varmestråling, Stefan-Boltzmanns lov.

# Strøm i serie

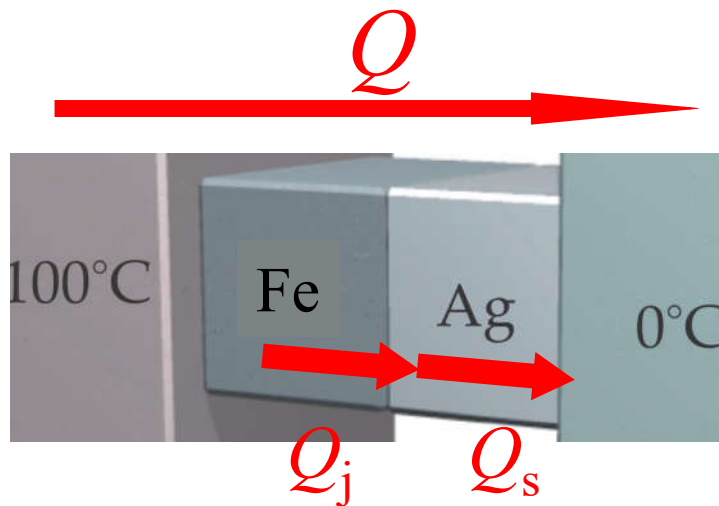
Elektrisk strøm



$$I = I_1 = I_2 !$$

Potensialfall  
 $\Delta V_i = R_i I$  ulik

Varmestrøm

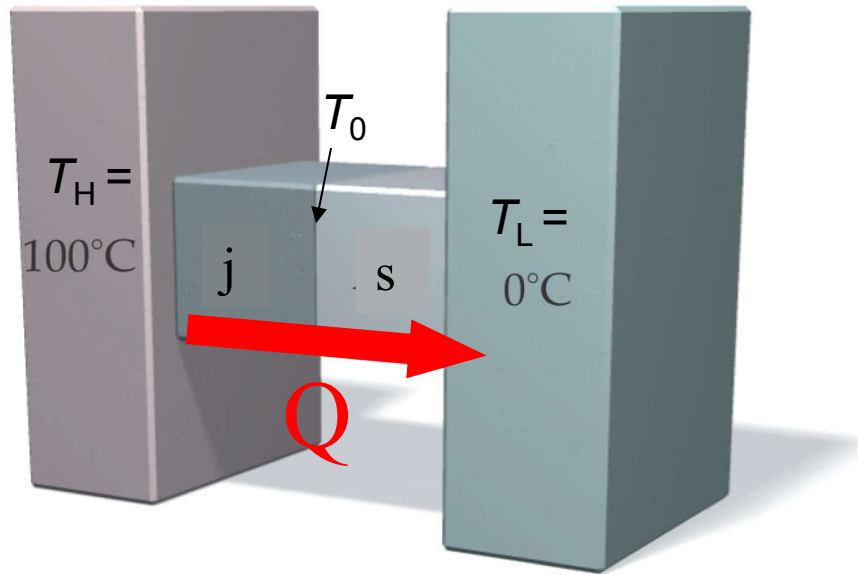


$$Q = Q_j = Q_s !$$

Temperaturfall  
 $\Delta T = R_i Q$  ulik

# Varmeledning, Eks. 1

∞ stort reservoar ∞ stort reservoar



$$\dot{Q} = \dot{Q}_j = \frac{A\kappa_j}{l_j}(T_H - T_0)$$

$$\dot{Q} = \dot{Q}_s = \frac{A\kappa_s}{l_s}(T_0 - T_L)$$

gir

$$\dot{Q} = \frac{T_H - T_L}{R_{\text{tot}}} = \frac{100 \text{ K}}{1,07 \text{ K/W}} = 94 \text{ W}$$

$$A = 6,0 \text{ cm}^2 = 6,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$l_j = 4,0 \text{ cm}$$

$$l_s = 6,0 \text{ cm}$$

$$\kappa_j = 80 \text{ W/(Km)}$$

$$\kappa_s = 429 \text{ W/(Km)}$$

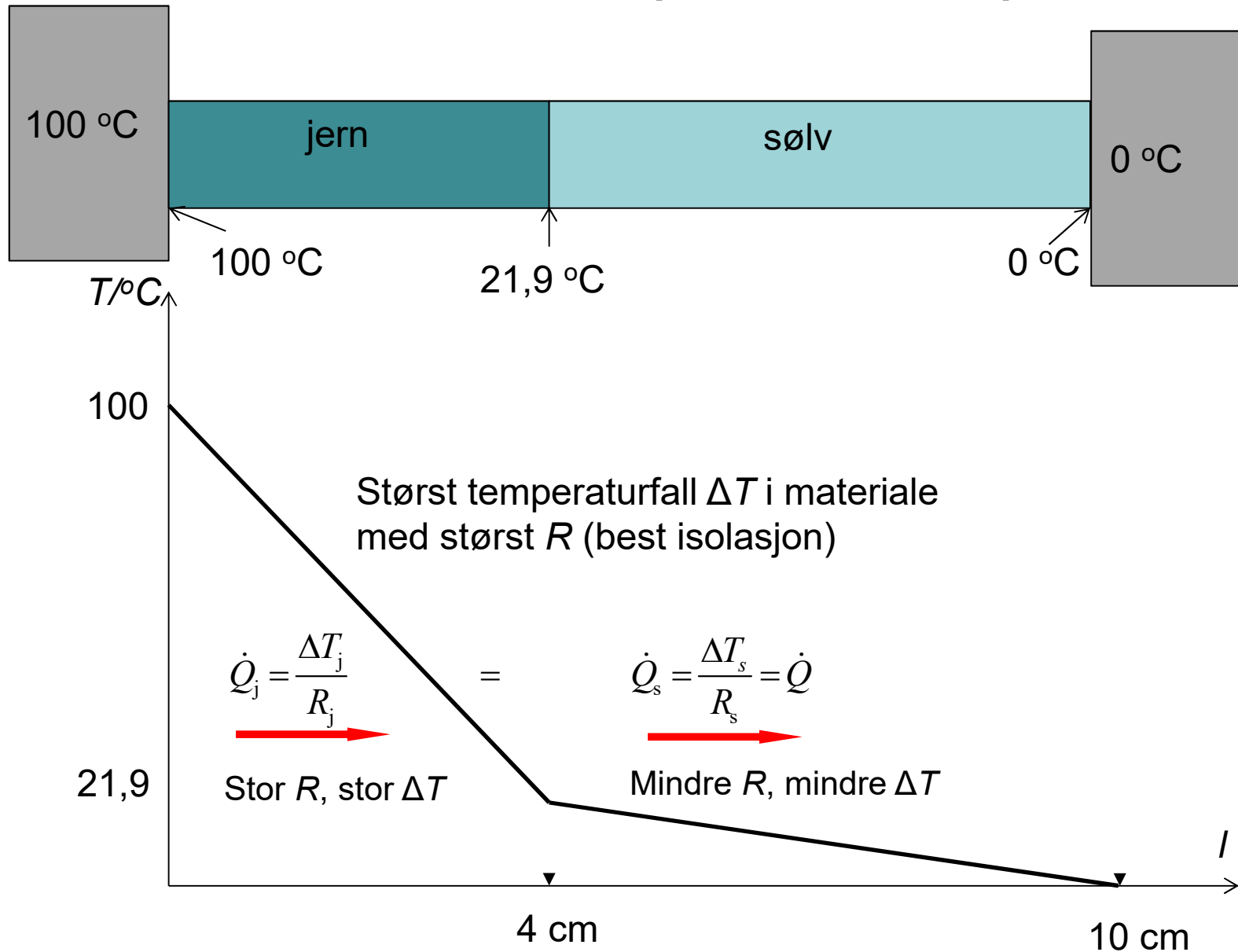
der varmeresistans =

$$R_{\text{tot}} = R_j + R_s = \frac{l_j}{A\kappa_j} + \frac{l_s}{A\kappa_s} = 1,07 \text{ K/W}$$

Eksempel  
utregning:

$$R_j = \frac{l_j}{A\kappa_j} = \frac{0,04 \text{ m}}{6,0 \cdot (10^{-2} \text{ m})^2 \cdot 80 \text{ W/mK}} = 0,833 \text{ K/W}$$

# Eks. 1: Temperaturforløp



Fouriers varmeledningslov,  
ulike former

$$\dot{Q} = \kappa A \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{1}{R} \Delta T$$
$$j = \frac{\dot{Q}}{A} = -\kappa \frac{dT}{dx}$$
$$\vec{j} = -\kappa \vec{\nabla} T$$

Ohms lov,  
ulike former

$$I = \sigma A \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{1}{R} \Delta V$$
$$j = \frac{I}{A} = -\sigma \frac{dV}{dx}$$
$$\vec{j} = -\sigma \vec{\nabla} V = \sigma \vec{E}$$

Strømtetthetsvektor:  $\vec{j}$

Konduktivitet:  $\kappa$  og  $\sigma$

Gradient(drivkraft):  $-\vec{\nabla} T$  og  $-\vec{\nabla} V = \vec{E}$

# Varmeresistans i Young & Freedman:

Y&F bruker resistans:  $R_{YF} = RA = \frac{l}{\kappa}$

$R$  = «thermal resistance»       $R_{YF}$  = «thermal insulance»

Vi (og vanlig i fysikk):  $\dot{Q} = \frac{1}{R} \Delta T$        $j = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{1}{AR} \Delta T$

Y & F (og i byggebransjen):  $\dot{Q} = \frac{A}{R_{YF}} \Delta T$        $j = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{1}{R_{YF}} \Delta T$

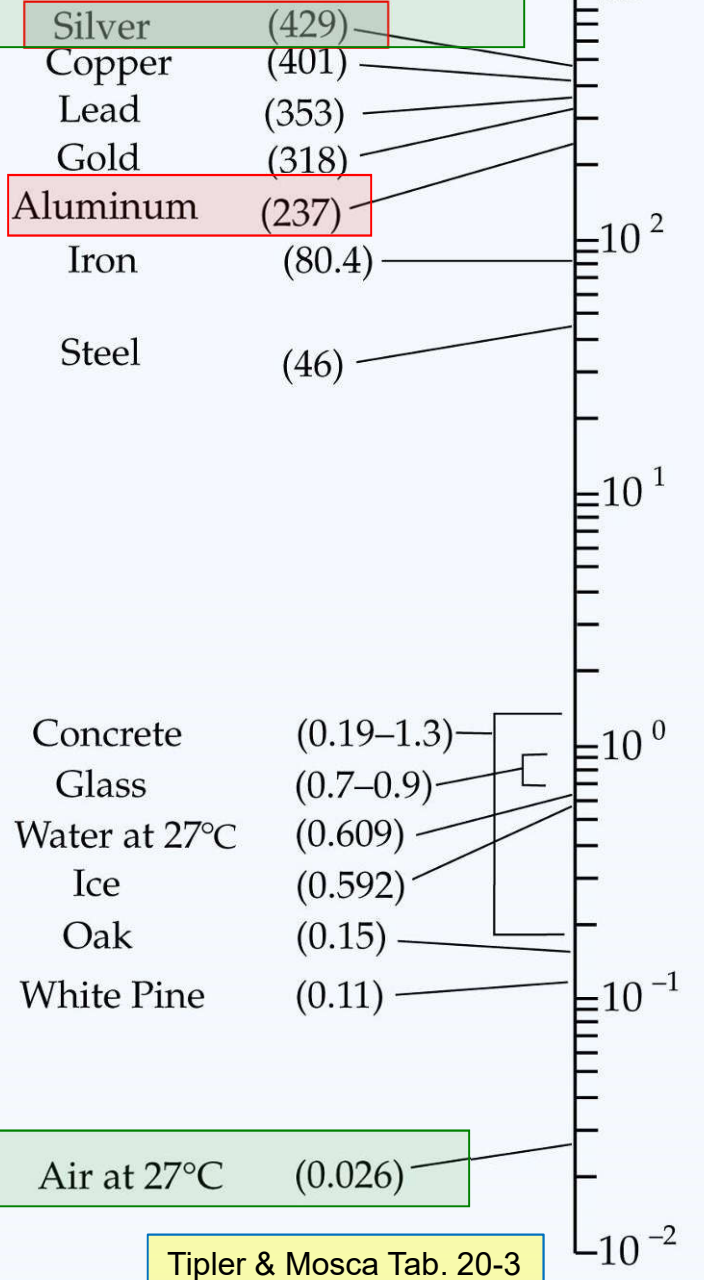
Dessuten bruker Y & F:  $H = \dot{Q}$

Varmeledningsevne,

( $k = \kappa$ )

For ulike materialer ved romtemp

Beste leder



[Tabell Wikipedia](#)

Beste isolator

Tipler & Mosca Tab. 20-3

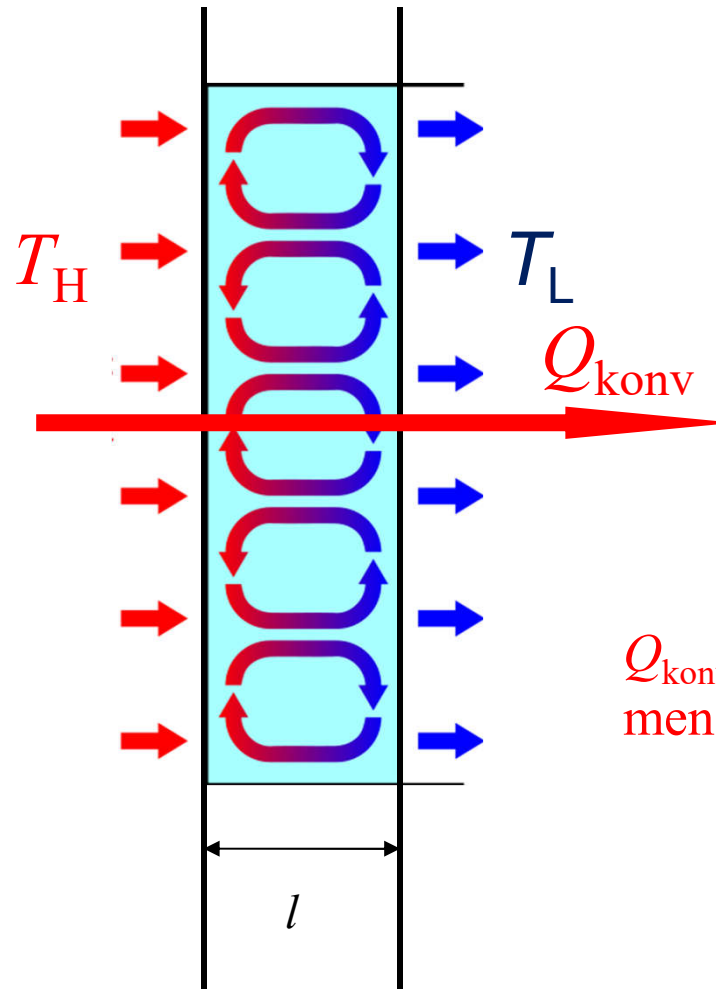
**Table 17.5 Thermal Conductivities**

Substance	$k$ (W/m·K)
<i>Metals</i>	
Aluminum	205.0
Brass	109.0
Copper	385.0
Lead	34.7
Mercury	8.3
Silver	406.0
Steel	50.2
<i>Solids (representative values)</i>	
Brick, insulating	0.15
Brick, red	0.6
Concrete	0.8
Cork	0.04
Felt	0.04
Fiberglass	0.04
Glass	0.8
Ice	1.6
Rock wool	0.04
Styrofoam	0.027
Wood	0.12–0.04
<i>Gases</i>	
Air	0.024
Argon	0.016
Helium	0.14
Hydrogen	0.14
Oxygen	0.023

Y&F Tab 17.5

# Konveksjon

## Vertikalt skille

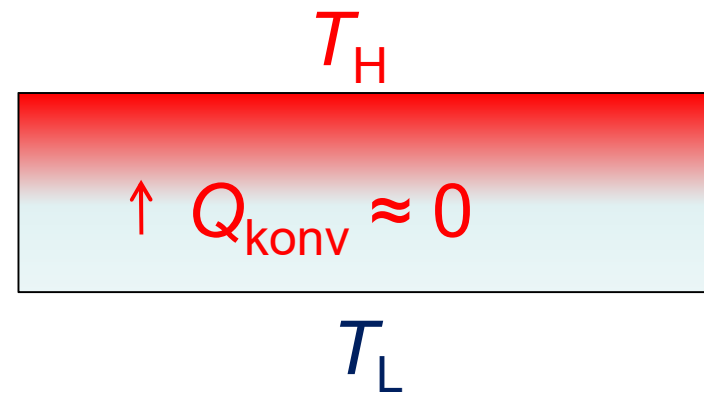
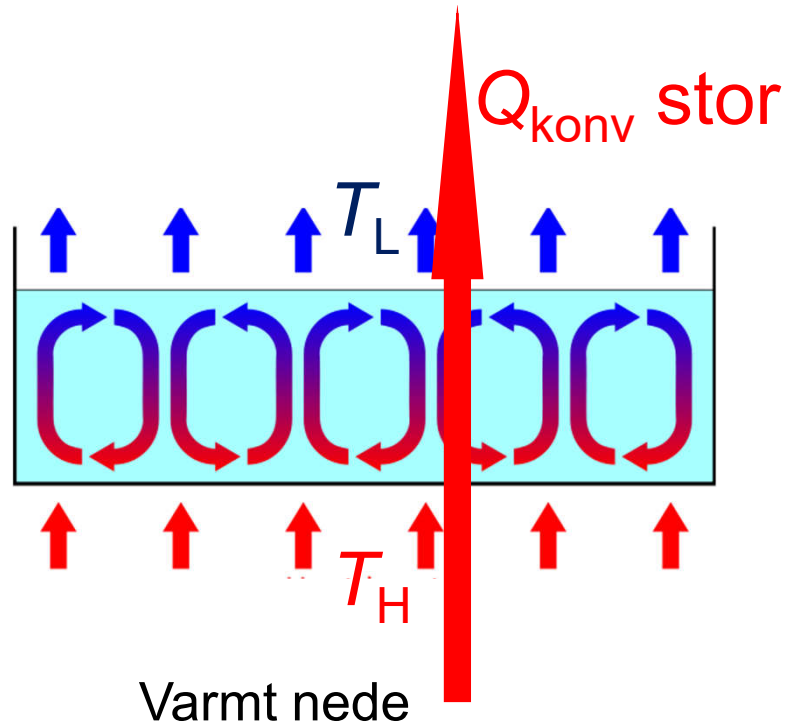


$Q_{konv}$  øker med  $l$ ,  
mens  $Q_{ledn}$  avtar med  $l$ .



# Konveksjon

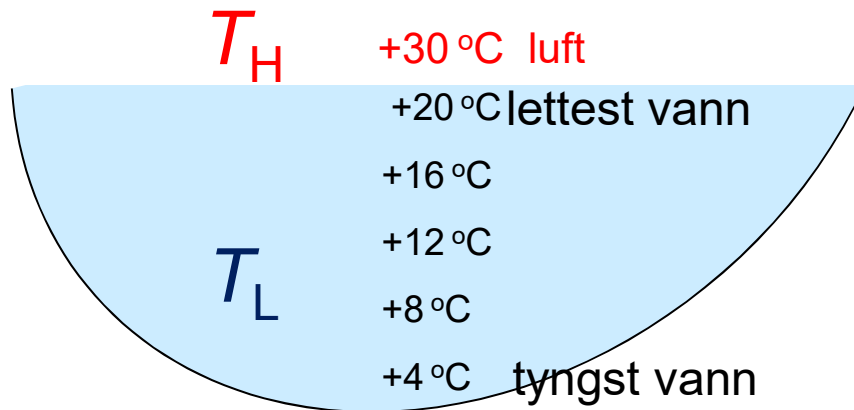
## Horisontalt skille



Varmt oppe:  
lite strømning

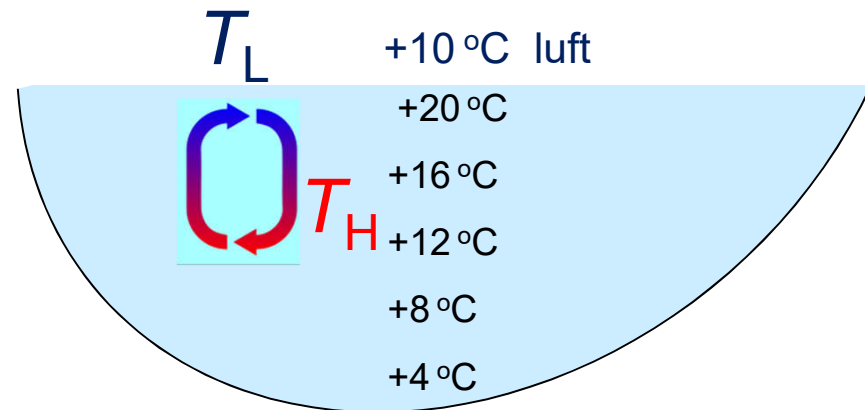
# Konveksjon i vann 4 °C til 30 °C

Innsjø en varm sommerdag:



Liten konveksjon,  
langsom oppvarming  
(bare øverste lag varmes opp)

Innsjø en kald sommerdag:



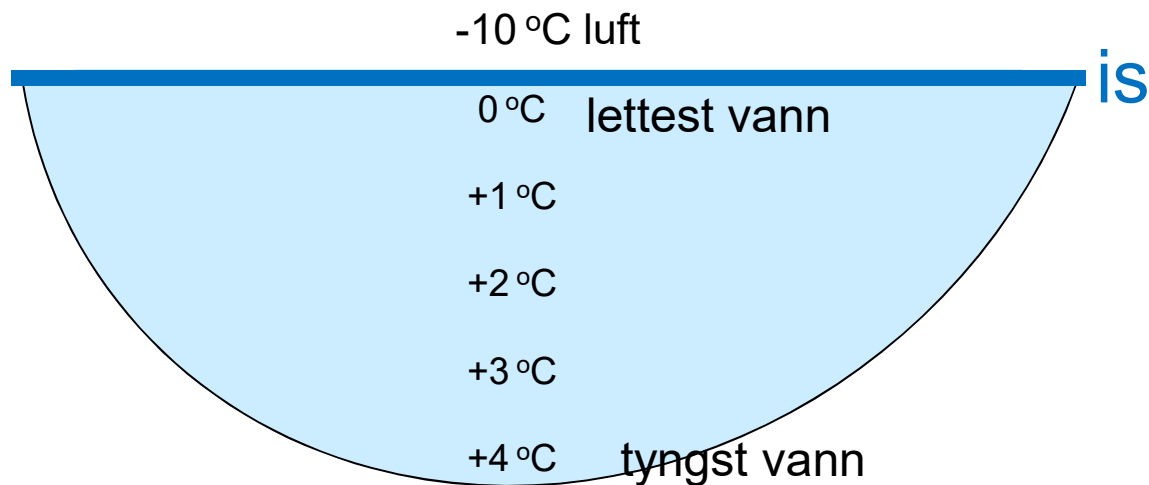
Mye konveksjon,  
effektiv avkjøling.

I tillegg bidrar også vind sterkt til strømning i vann

4 °C vann ligger alltid i bunnen....  
**Vann har størst tetthet ved + 4 °C.**

# Konveksjon i vann 0 til 4 °C

**Innsjø om vinteren:**

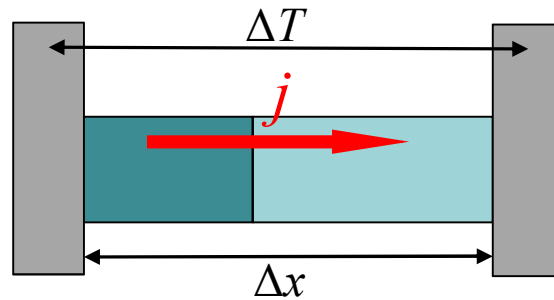


Ingen sirkulasjon når  $< 4$  °C  
=> minimal konveksjon, kun varmeledning

**Vann har størst tetthet ved + 4 °C**

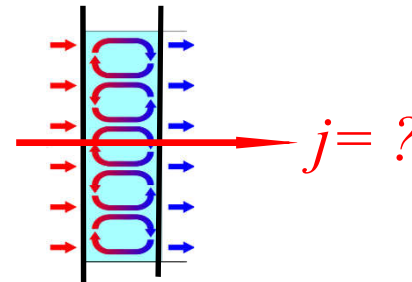
# Varmetransport

## 1. Varmeledning, Fouriers lov



$$\dot{Q} = \kappa A \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{1}{R} \Delta T$$
$$j = \frac{\dot{Q}}{A} = -\kappa \frac{dT}{dx}$$
$$\vec{j} = -\kappa \vec{\nabla} T$$

## 2. Konveksjon (strømning).



## 3. Varmeovergang (vegg/luft)

## 4. Varmestråling, Stefan-Boltzmanns lov.

Varmeledningsevne,

$(k =) \kappa$

$i \rightarrow j = \kappa \cdot \Delta T / \Delta x$

for ulike materialer ved romtemp

Varmeovergangstall:

$\alpha_{ute} = 25 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$

$\alpha_{inne} = 7,5 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$

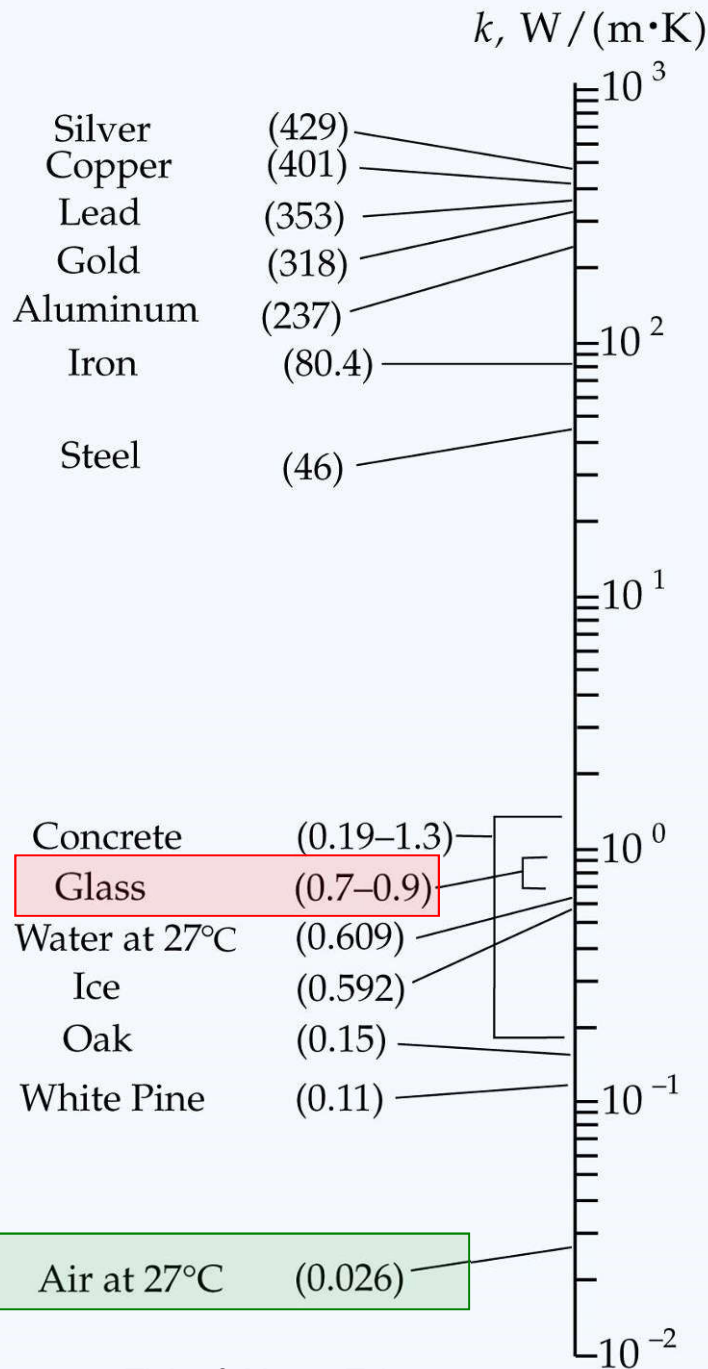
$i \rightarrow j = \alpha \Delta T$

med

$j = \frac{\dot{Q}}{A}$

Beste isolator

Air at 27°C (0.026)

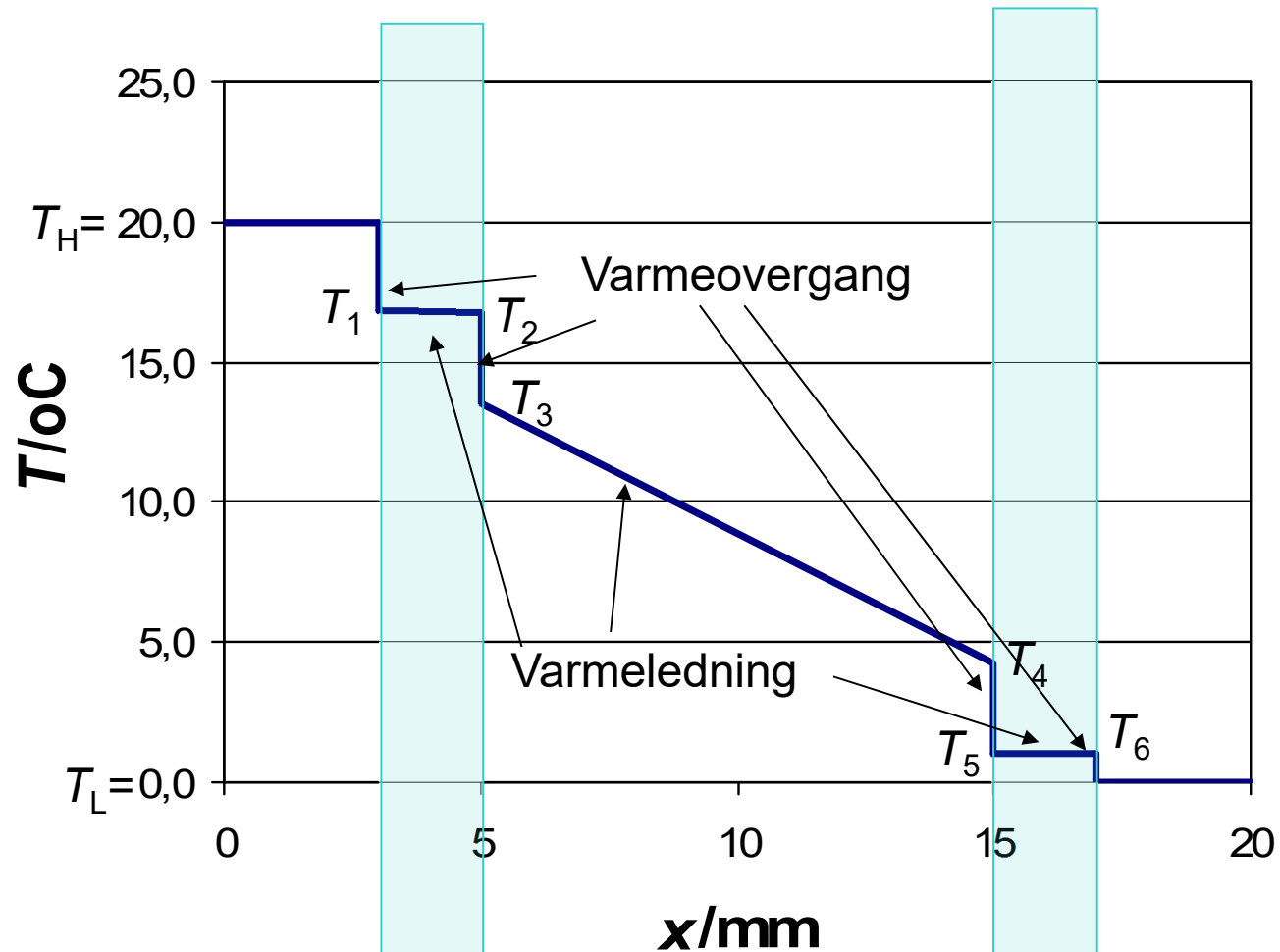


Tipler & Mosca Tab. 20-3

Table 17.5 Thermal Conductivities

Substance	$k$ (W/m · K)
<i>Metals</i>	
Aluminum	205.0
Brass	109.0
Copper	385.0
Lead	34.7
Mercury	8.3
Silver	406.0
Steel	50.2
<i>Solids (representative values)</i>	
Brick, insulating	0.15
Brick, red	0.6
Concrete	0.8
Cork	0.04
Felt	0.04
Fiberglass	0.04
Glass	0.8
Ice	1.6
Rock wool	0.04
Styrofoam	0.027
Wood	0.12-0.04
<i>Gases</i>	
Air	0.024
Argon	0.016
Helium	0.14
Hydrogen	0.14
Oxygen	0.023

## Eks. 2: Temperaturforløp dob.glassvindu



Hva hvis konveksjon mellom rutene gjør seg gjeldende?

$l_1/\kappa_1 \rightarrow R_{\text{konv}} A$ , mye mindre enn 0,385  $\Rightarrow j$  større  $\Rightarrow T_3 - T_4$  mindre

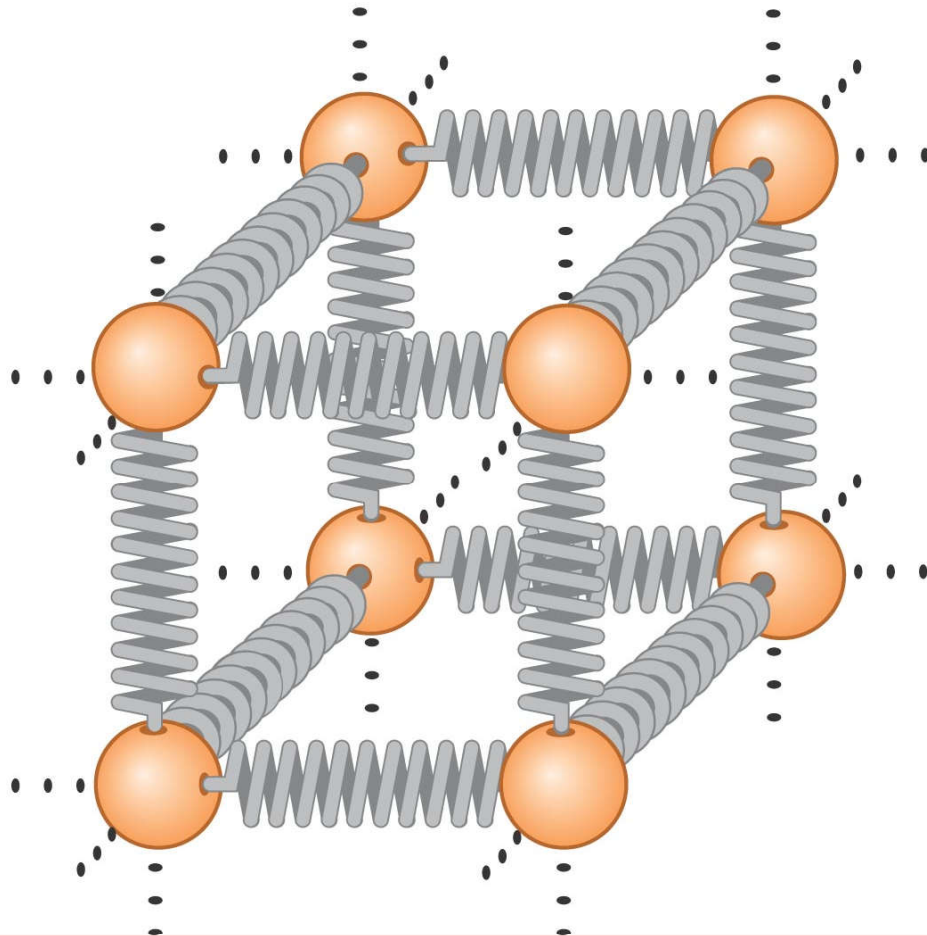
# Varmetransport

1. Varmeledning, Fouriers lov
2. Konveksjon (strømning)
3. Varmeovergang (vegg/luft)
4. Varmestråling, Stefan-Boltzmanns lov  
(Y&F 17.7+39.5, L&H&L 18.4)

Alle legemer sender ut ems (elektromagnetisk stråling):  
Infrarødt ved romtemp, rødt → hvitt ved høyere temperaturer.

Årsak: termiske vibrasjoner i molekyler = akselererende elektroner.

Figure 18.20



Atomer vibrerer,  
kraftigere jo høyere  
temperatur

Vibrasjon = akselerasjon

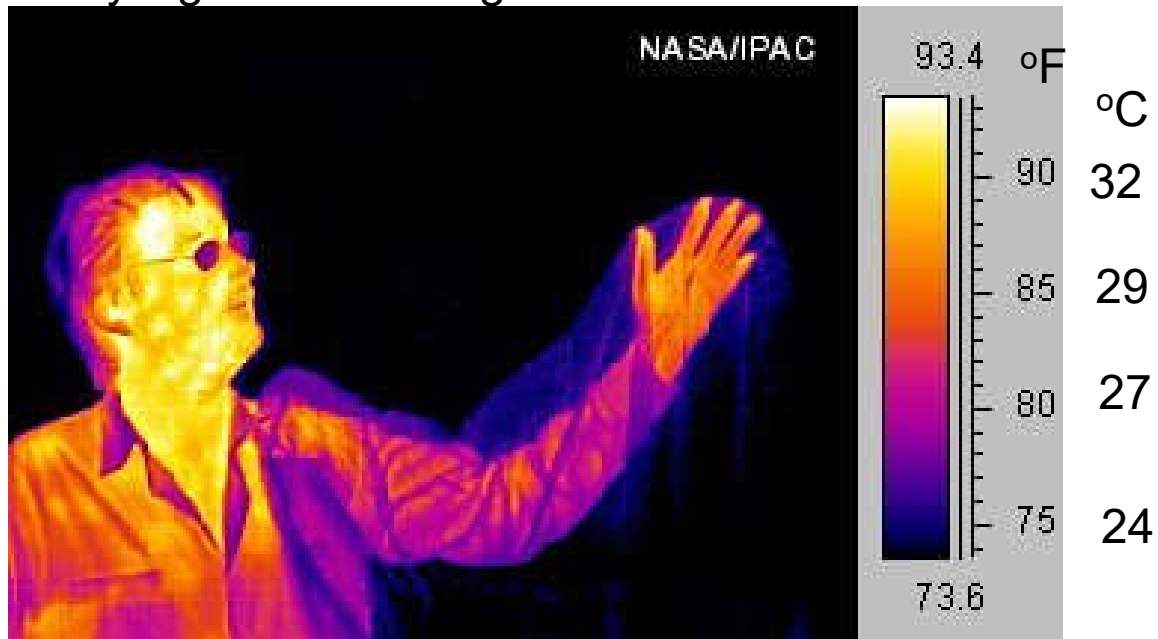
Akselererende elektroner  
sender ut ems

Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.  
Alle legemer sender ut ems (elektromagnetisk stråling):  
Infrarødt ved romtemp, rødt → hvitt ved høyere temperaturer.

Årsak: termiske vibrasjoner i molekyler = akselererende elektroner.



Ikke-synlig varmestråling kan detekteres av IR-kamera



Fra: [https://en.wikipedia.org/wiki/Black-body\\_radiation](https://en.wikipedia.org/wiki/Black-body_radiation)

# Varmetransport

1. Varmeledning, Fouriers lov
2. Konveksjon (strømning)
3. Varmeovergang (vegg/luft)
4. Varmestråling, Stefan-Boltzmanns lov

*Josef Stefan,  
eksperimenter 1879*

*Ludvig Boltzmann,  
teori 1884*

Alle legemer sender ut e.m.stråling:  
Infrarødt ved romtemp, rødt → hvitt ved  
høyere temperaturer

$$j = e \sigma T^4$$

# Emissivitet $e$ for ulike materialer

Materiale	$e$
Omhyggelig polert gull	0,02 – 0,03
Omhyggelig polert sølv	0,02 – 0,03
Omhyggelig polert messing	0,03
Oksydert messing	0,6
Polert aluminium og –folie	0,04 – 0,06
Upolert aluminium	0,06 – 0,07
Sterkt oksydert aluminium	0,2 – 0,3
Karbon: grafitt	0,7 – 0,8
Karbon: sot på overflate	0,96
Glasert porselen	0,92
Gummi	0,85 – 0,95
Gips	0,93
Vann	0,95 – 0,96
Betong	0,85
Wolfram (glødetråd)	0,4 – 0,5

Liten

$$j = e \sigma T^4$$

Emissivitet  $e$   
=  
absorpsjonsevne  $a$

Mer seinere!

Stor

Fra Handbook og Physics & Chemistry:  
[www.hbcnetbase.com/](http://www.hbcnetbase.com/)

og

[www.engineeringtoolbox.com/  
emissivity-coefficients-d\\_447.html](http://www.engineeringtoolbox.com/emissivity-coefficients-d_447.html)

# Eks. 3 Termisk stråling fra sola

$$j_{\text{sol}} = e\sigma T_{\text{sol}}^4$$

$$= 1,5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (5778)^4 \text{ W/m}^2 = 63,2 \text{ MW/m}^2$$

$j_{\text{sol}}$  i alle retninger => total effekt:

$$P_{\text{sol}} = j_{\text{sol}} \cdot 4\pi R_{\text{sol}}^2 = 3,85 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

$$j_{\text{inn,jord}} = P_{\text{sol}} / 4\pi R_{\text{sj}}^2 = 1,37 \text{ kW/m}^2$$

Andel  $r = 0,306$  reflekteres i atm.:

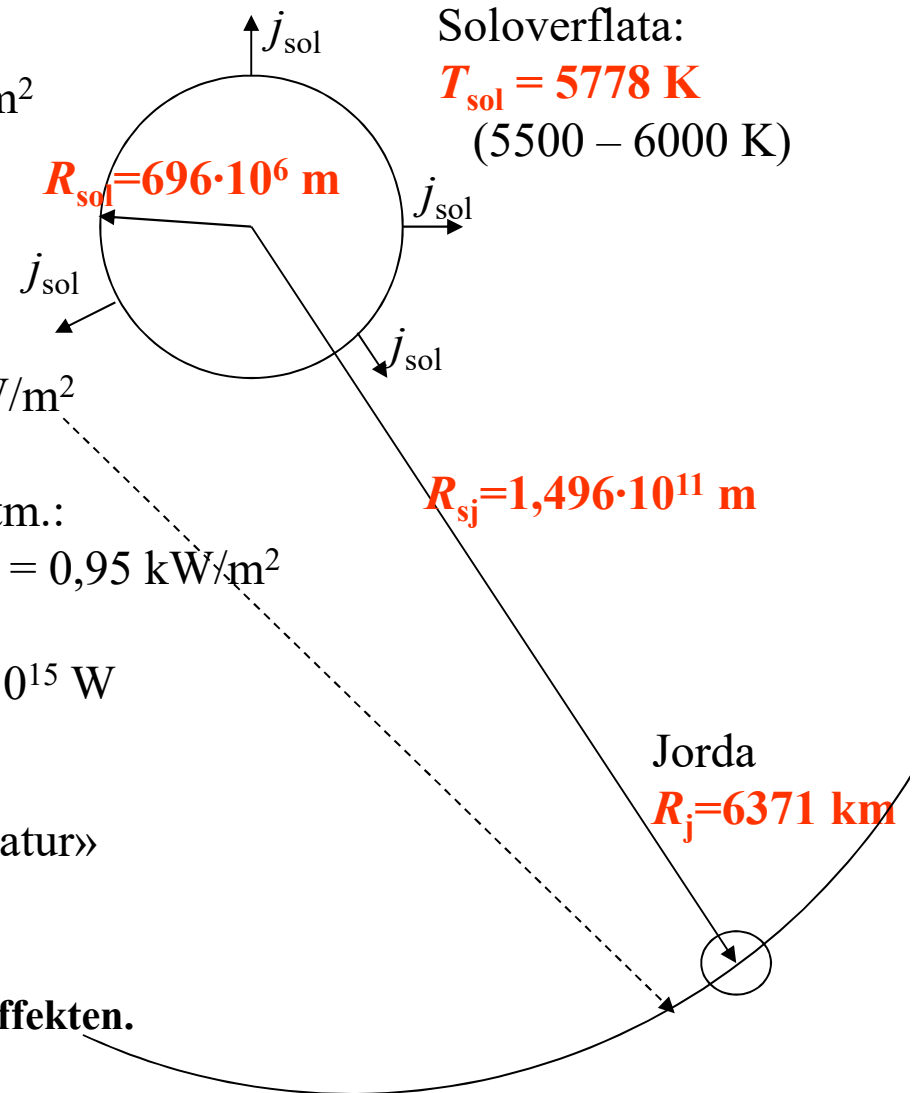
$$j_{\text{jordoverflate}} = (1-r) \cdot 1,37 \text{ kW/m}^2 = 0,95 \text{ kW/m}^2$$

$$P_{\text{inn}} = j_{\text{jordoverflate}} \cdot \pi R_{\text{j}}^2 = 121 \cdot 10^{15} \text{ W}$$

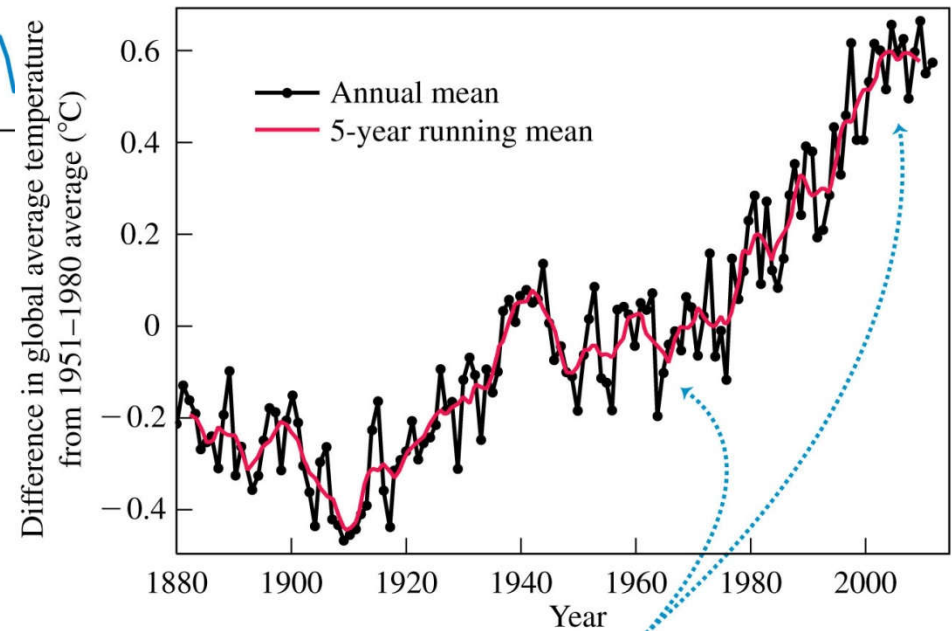
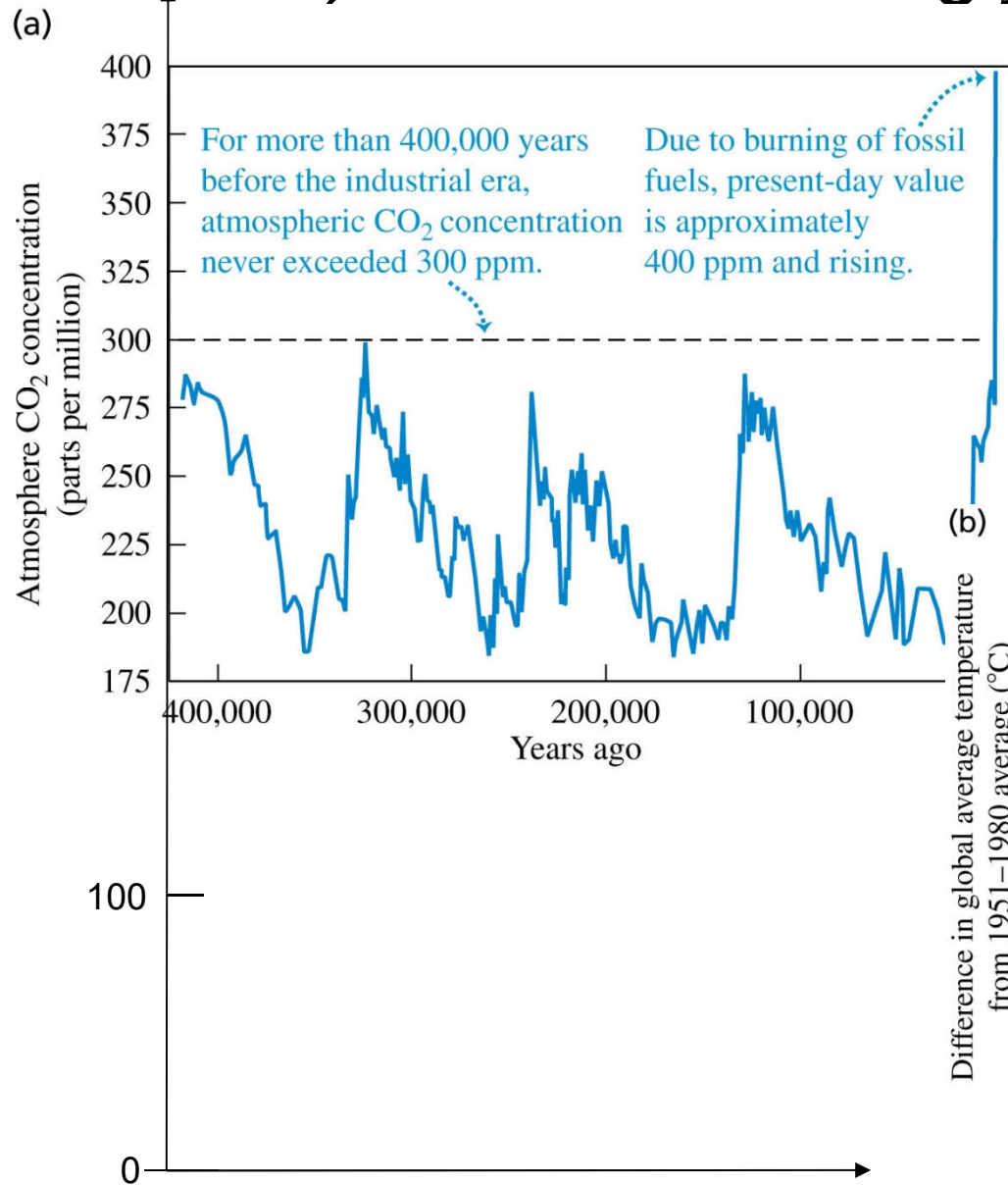
Energibalanse gir jordas «svartstrålingstemperatur»

$$T_{\text{j}} = -18,8 \text{ }^\circ\text{C}$$

Avvik til jordas snittemp.  $+14 \text{ }^\circ\text{C}$  skyldes **drivhuseffekten**.



# CO<sub>2</sub> i atmosfæren og jordas temperatur (drivhuseffekten)



Increased atmospheric CO<sub>2</sub> due to burning of fossil fuels is the cause of this continuing increase in global average temperatures.

▪ **Varmestråling:**

- Alle legemer/overflater stråler ut el.magn.stråling:
- Stefan-Boltzmanns lov:  $j = e \sigma T^4$  (W/m<sup>2</sup>)

**Eks. 4: Menneskekroppen:**

$$T = 32 \text{ }^{\circ}\text{C} = 305 \text{ K}, \quad e = 0,8 \quad A = 1,8 \text{ m}^2$$

- $P_{\text{ut}} = e \sigma (305 \text{ K})^4 \cdot 1,8 \text{ m}^2 = 707 \text{ W}$  (naken kropp)

- 20 °C omgivelser:

$$P_{\text{inn}} = e \sigma (293 \text{ K})^4 = 602 \text{ W} \quad P_{\text{netto}} = 105 \text{ W} \quad (\text{ut})$$

- 0 °C omgivelser:

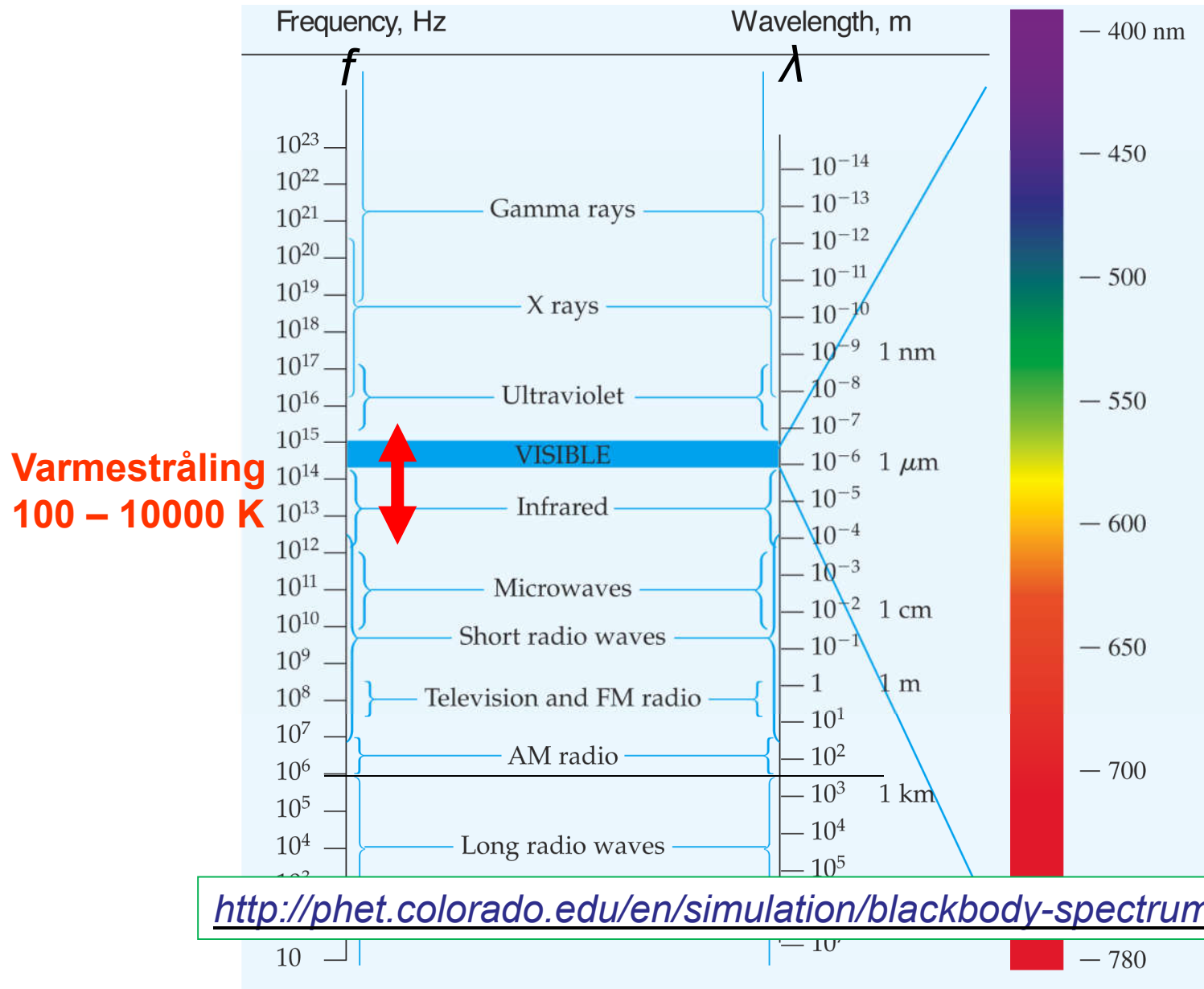
$$P_{\text{inn}} = e \sigma (273 \text{ K})^4 = 454 \text{ W} \quad P_{\text{netto}} = 253 \text{ W} \quad (\text{ut})$$

- Steikende sol 1,0 kW/m<sup>2</sup> :

$$P_{\text{inn}} = e \cdot 1,0 \text{ kW/m}^2 \cdot 0,5 \text{ m}^2 \\ + e \sigma (293 \text{ K})^4 \cdot 1,8 \text{ m}^2 = 1002 \text{ W}$$

$$P_{\text{netto}} = 295 \text{ W} \quad (\text{inn})$$

# Bølgelengdefordelingen i varmestråling: Plancks lov



# Plancks strålingslov

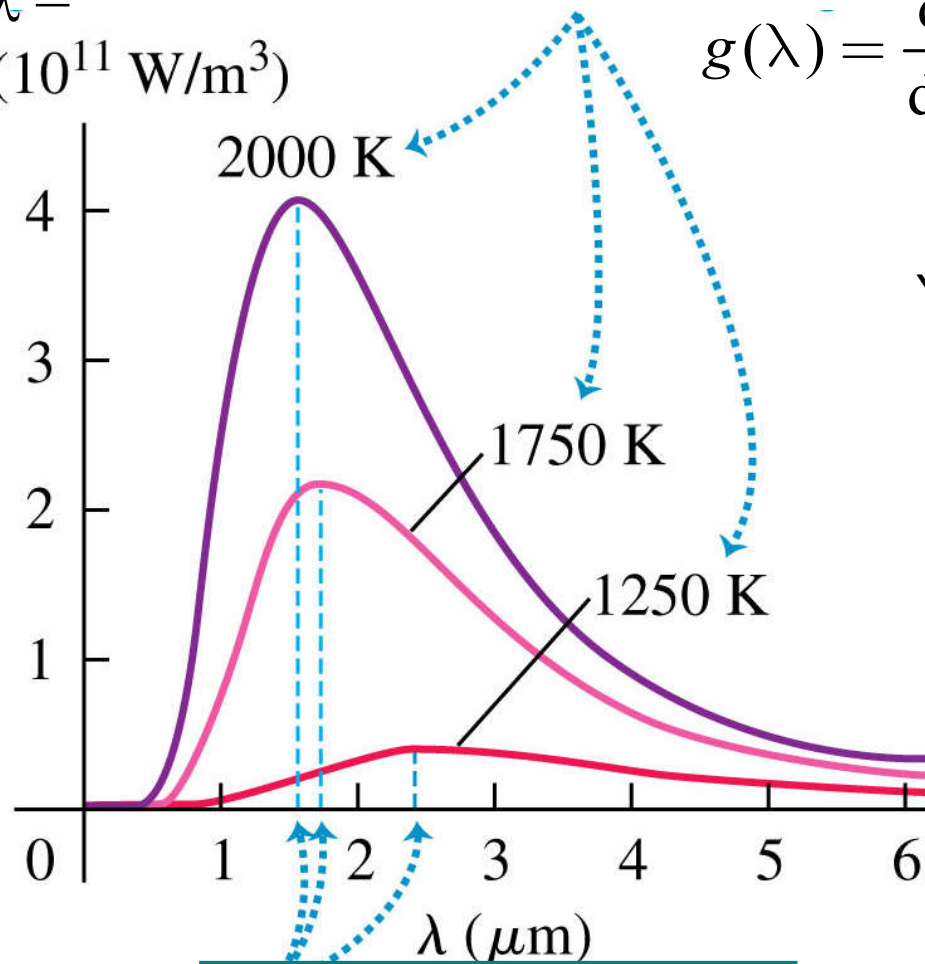
$$dj/d\lambda = I(\lambda) \text{ (} 10^{11} \text{ W/m}^3 \text{)}$$

$$g(\lambda) = \frac{dj}{d\lambda} = 2\pi hc^2 \frac{\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{hc}{k_B T \lambda}\right) - 1}$$

Young & Freedman bruker:

$$I(\lambda) = 2\pi hc^2 \frac{\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{hc}{k_B T \lambda}\right) - 1}$$

(litt uheldig da  $I$  ofte er intensitet)



$\lambda_{\max}$  øker når  $T$  avtar

$$\lambda_{\max} = 2898 \mu\text{m K} / T$$

*Wiens forskyvningslov*  
(Wilhelm Wien 1893, fra termodyn.)



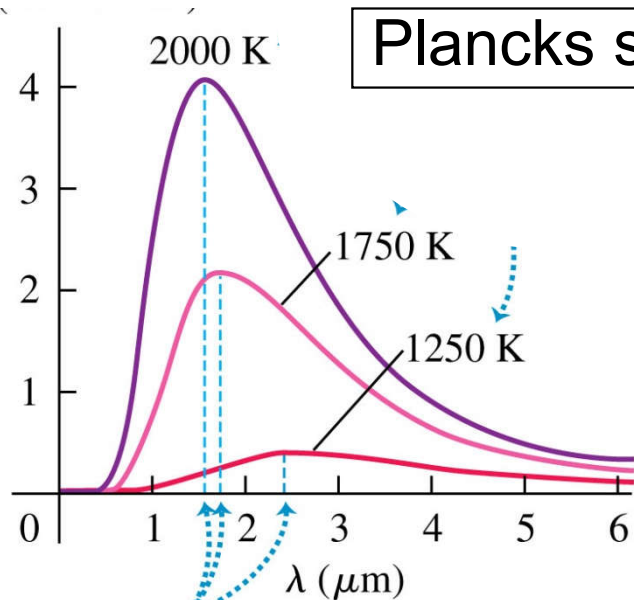


# Max Planck (1858 – 1947)

- Grunnlegger kvantemekanikk:  
1900: Strålingens bølgelengdefordeling
- 1918: Nobelpris fysikk

Kvantemekanikkens gjennombrudd rundt 1925:

- Werner Heisenberg (1901-1976)
- Albert Einstein (1879-1955)
- Erwin Schrödinger (1887-1961)



Plancks strålingslov

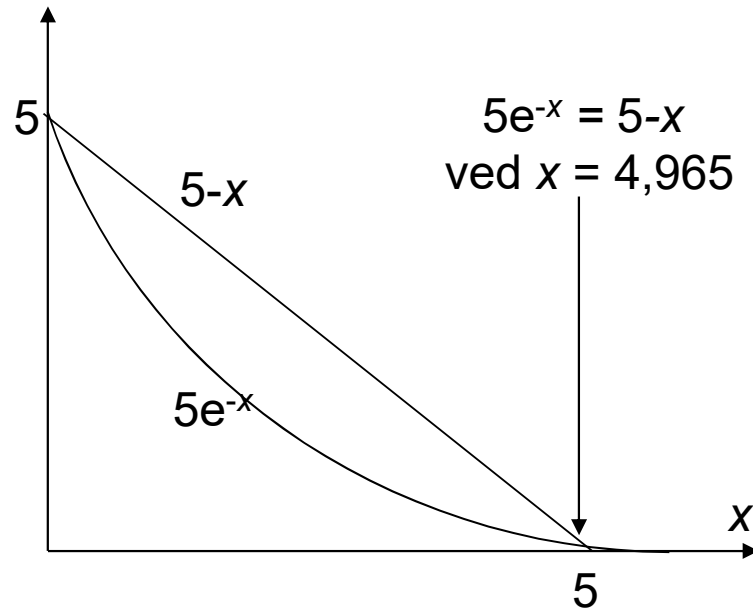
$$g(\lambda) = \frac{dj}{d\lambda} = 2\pi hc^2 \frac{\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{hc}{k_B T \lambda}\right) - 1}$$

Interaktiv graf:

[phet.colorado.edu/en/simulation/blackbody-spectrum](https://phet.colorado.edu/en/simulation/blackbody-spectrum)

Finne  $\lambda_{\max}$  i  $g(\lambda)$ .

Grafisk finne løsning av  $5e^{-x} = 5-x$  :



$$43) \int_0^{\infty} \frac{x^{2n}}{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}} dx = \frac{E_n}{2} \left( \frac{\pi}{2\alpha} \right)^{2n+1}, \quad \alpha > 0, n = 0, 1, 2, \dots \quad *)$$

$$44) \int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{e^{\alpha x} - 1} dx = \frac{|B_{2n}|}{4n} \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^{2n}, \quad \alpha > 0, n = 1, 2, \dots \quad *)$$

$n = 2$   
 $\alpha = 1$   
 Bernoullitall  
 $B_4 = 1/30$

$\Rightarrow \pi^4/15$

$$45) \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6}$$

$$46) \int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{e^{\alpha x} + 1} dx = \frac{2^{2n-1} - 1}{2n} |B_{2n}| \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^{2n}, \quad \alpha > 0, n = 1, 2, \dots \quad *)$$

$$47) \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + 1} dx = \frac{\pi^2}{12}$$

$$48) \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

# Plancks strålingslov

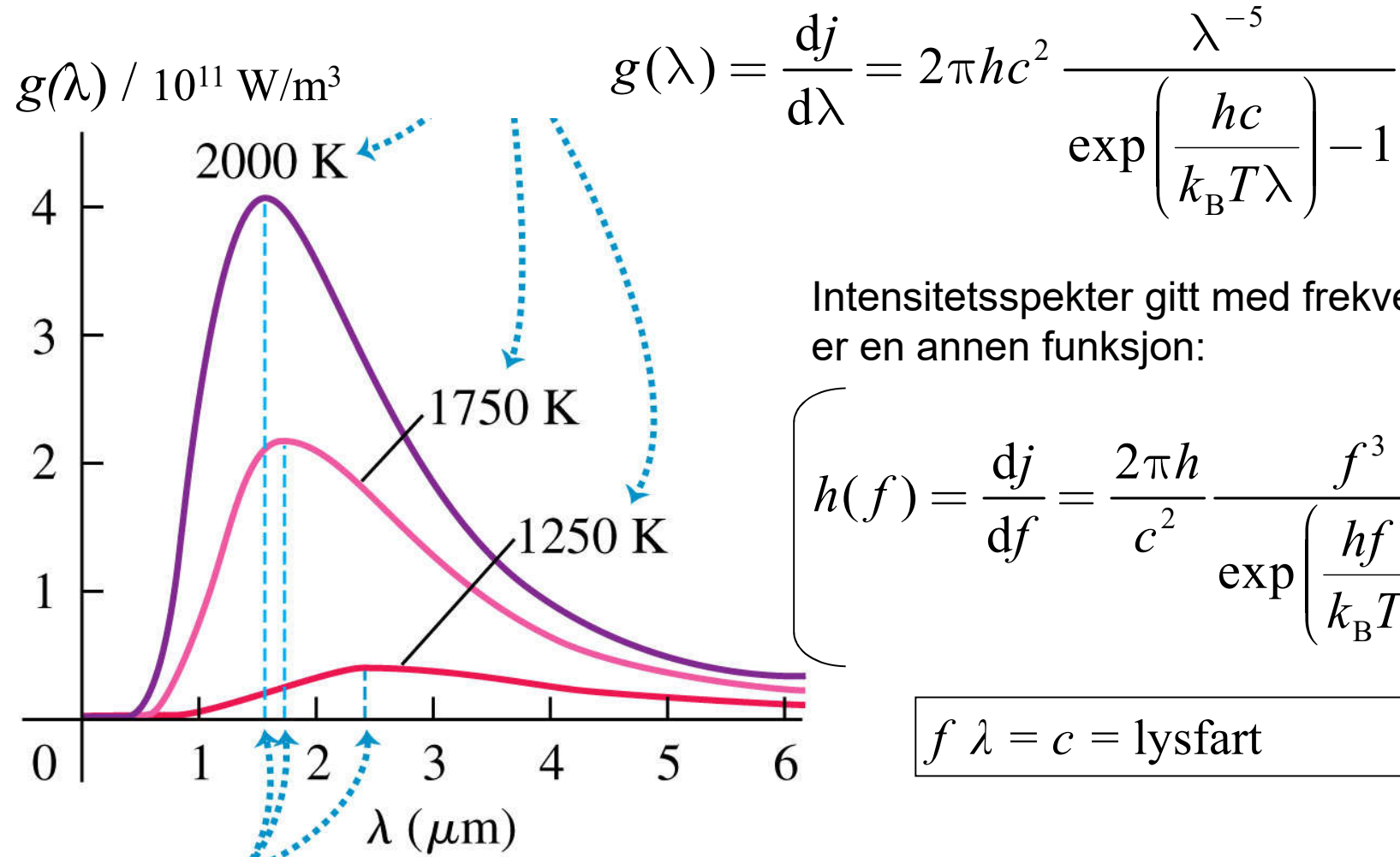
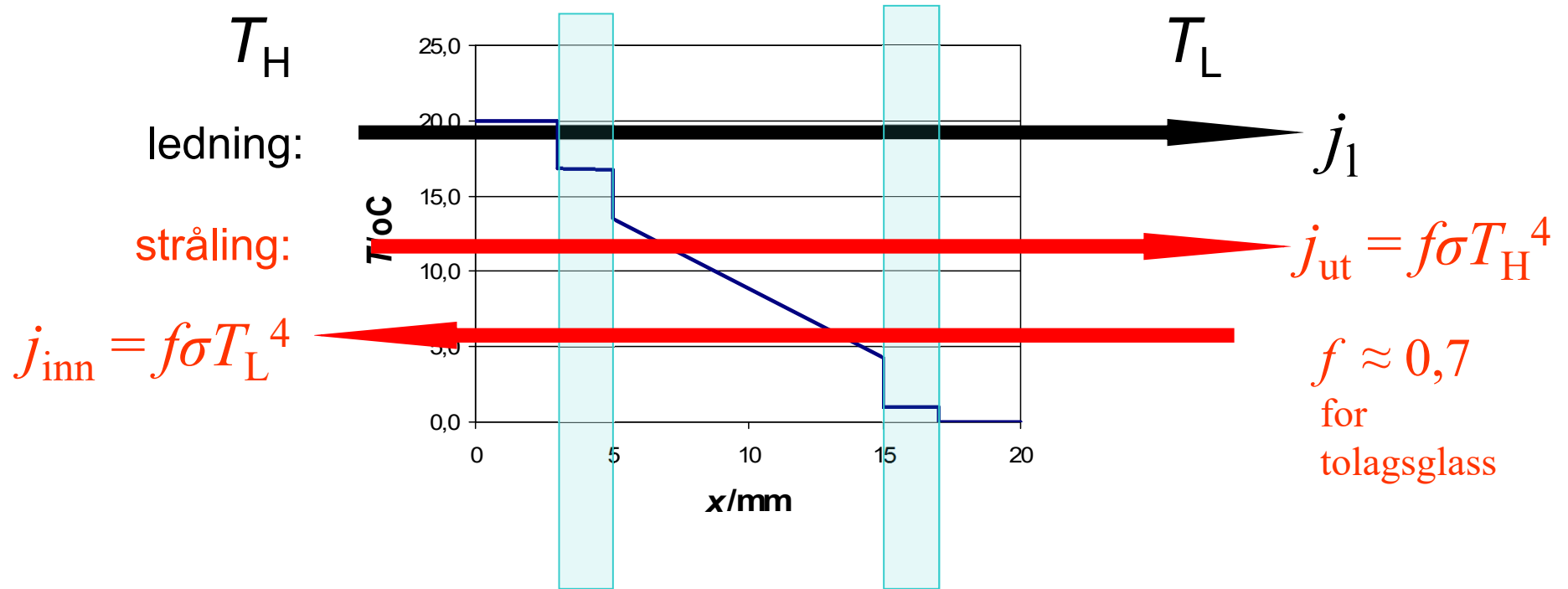


Figure 39.32

# Eks 5: Temperaturforløp dob.glassvindu



varmeledning:  $j_1 = (T_H - T_L) / A\Sigma R_i$ ,  $A\Sigma R_i = A(R_{\text{overgang}} + R_{\text{glass}} + R_{\text{luft}}) = 0,83 \text{ m}^2\text{K/W}$

varmestråling:  $j_s = j_{ut} - j_{inn} = f\sigma T_H^4 - f\sigma T_L^4 \approx f\sigma 4T_m^3 (T_H - T_L) = 3,60 \text{ W/m}^2\text{K} (T_H - T_L)$

$f \approx 0,7$  inkluderer, transmisjon, refleksjon, absorpsjon og emisjon

Totalt:  $j = (1,2 + 3,6) \text{ W/m}^2\text{K} (T_H - T_L)$  Stråling vesentlig bidrag!

# Linearisering av $T^4$

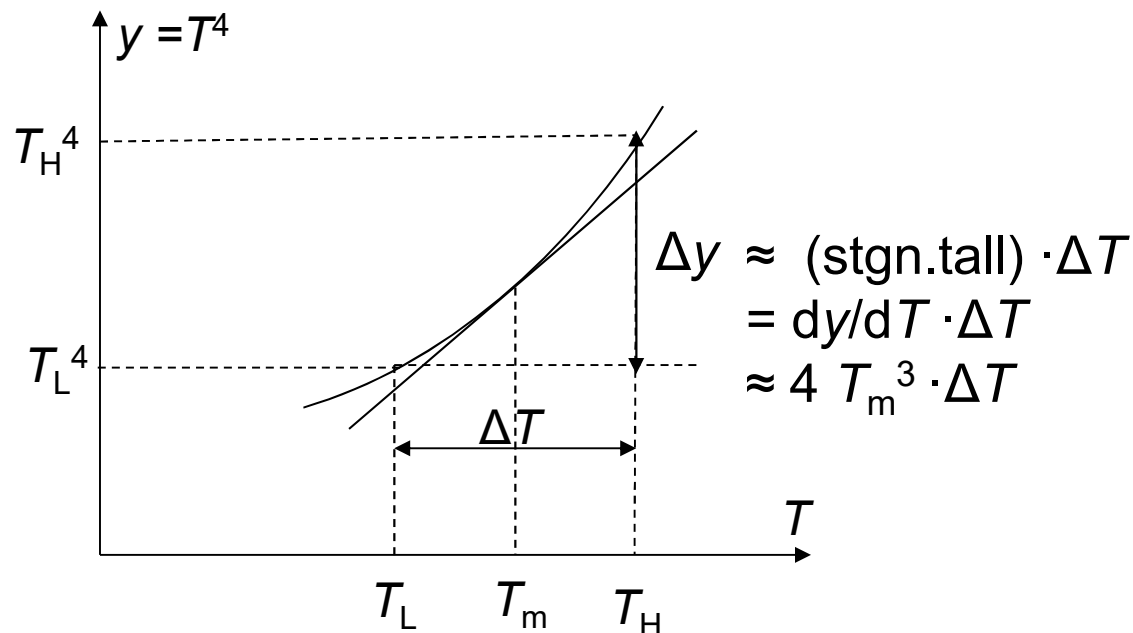
$$y = T^4 \Rightarrow dy/dT = 4 T^3$$

$$\text{dvs.} \quad \Delta y \approx 4 T^3 \Delta T$$

$$y(T_H) - y(T_L) \approx 4 T_m^3 (T_H - T_L)$$

$$\text{med } T_H < T_m < T_L$$

Grafisk:



# Vinduer og vegger: $U$ -verdi (tidligere $k$ -verdi)

Def:  $j = U \Delta T$  Enhet:  $W/m^2K$

$$j = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{\Delta T}{R} \frac{1}{A} = U \cdot \Delta T \Rightarrow U = \frac{1/R}{A}$$

der  $R$  = varmeresistansen ( $K/W$ )

OBS:

Y&F's resistans:

$$R_{YF} = R A \Rightarrow U = 1/R_{YF}$$

www.enova.no:	U-verdi
Enkelt glass i ramme	5,0
To glass i koblet vindu	2,4
Tolags isolerrute	2,4
Tolags isolerrute med ett belagt glass og luft	1,6
Tolags isolerrute med ett belagt glass og argongass	1,4
Tolags isolerrute med belagt glass, argongass, varmkant, ny ramme og karm	1,2 - 1,1
Trelags isolerrute med to belagte glass, argongass, varmkant, ny ramme og karm	1,1 - 0,9
Trelags isolerrute med to belagte glass, argongass, varmkant, isolert ramme og karm	0,9 - 0,7

Minstekrav ny bolig: vinduer: 1,2; vegger: 0,18

Vårt vindu i Eks. 5 med varmeledning+stråling:

$$U = (1,2+3,6) W/m^2K = 4,8 W/m^2K \text{ (svært dårlig)}$$

# Varmetransport

## ▪ Varmeledning (Fouriers lov)

- Varmestrøm (W):  $dQ/dt = \kappa A \Delta T/\Delta l = \Delta T/R$   
er lik for alle lag gjennom f.eks. vindu.

- Varmestrømtetthet ( $\text{W/m}^2$ ):  $j = dQ/dt / A = - \kappa dT/dx$

## ▪ Konveksjon (materietransport) i gasser og væsker

## ▪ Varmerovergang mellom to materialer $j = - \alpha \Delta T$

## ▪ Varmestråling

- Alle legemer/overflater stråler ut el.magn.stråling, som øker sterkt med temperaturen  $T$ :

Stefan-Boltzmanns lov:  $j = e \sigma T^4$   $e = a$

$e = 1$  helt sorte overflater;  $e = 0$  helt blanke overflater

- Linearisering:  $j = \sigma (T_H^4 - T_L^4) \approx \sigma 4T_m^3 (T_H - T_L)$ ,  $T_m$  mellom  $T_H$  og  $T_L$

- Plancks strålingslov:

– Bølgelengdefordelingen for strålingsintensiteten:  $dj/d\lambda (\lambda, T)$ .

– Wiens forskyvningslov:  $\lambda_{\max} T = 2898 \mu\text{m K}$



# Eksamen des 2016.

## Statistikk (prosent riktig).

1. Flervalgs.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Mekanikk:	61	95	32	44	52	79	32	82	75	58	86	63
Termisk:	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	52	78	86	85	57	52	79	61	65	42	65	78

Mekanikk:	2a	2b	2c	3a	3b	3c	3d
	96	71	66	80	76	77	56

Termisk:	4a	4b	4c	4d	5	<b>Gjennomgå oppgaver markert rødt (dårligst besvarte)</b>
	94	80	62	68	42	

Karakterskala:

0 - - - - 40 | 41-52 | 53-64 | 65 - 76 | 77 - 88 | 89 - 100

F | E | D | C | B | A

Eksamen TFY4115 des 2016, opg. 1  
*Flervalgs - de dårligst besvarte:*

Oppgave	Snittresultat
1-3	<b>32 %</b>
1-4	<b>44 %</b>
1-5	52 %
1-7	<b>32 %</b>
1-10	58 %
1-13	52 %
1-17	57 %
1-18	52 %
1-20	61 %
1-22	<b>42 %</b>
1-23	65 %

*Avgitte svar:*

<b>Rett svar</b>	Opg:	3	4	5	7	10	13	17	18	20	22	23
	A	65	2	17	12	9	1	116	22	130	95	9
	B	23	98	115	53	21	38	10	7	45	9	27
	C	29	111	5	17	18	113	18	27	7	92	144
	D	42	4	12	13	21	44	3	12	5	1	17
	E	29	4	61	58	126	6	18	108	1	14	12
	blank	39	8	17	74	32	25	62	51	39	16	18
	Sum	227	227	227	227	227	227	227	227	227	227	227
	Snittres. %	32	44	52	32	58	52	57	52	61	42	65

# Eksamen des 2015.

## Statistikk (prosent riktig).

1. Flervalgs.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Mekanikk:	90	79	89	78	82	87	69	78	45	52	36	63
Termisk:	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	87	54	51	32	73	88	62	47	72	74	61	55

Mekanikk:	2a	2b	2c	3a	3b	3c	3d
	96	82	84	72	65	58	27

Termisk:	4a	4b	4c	4d	4e
	83	73	49	52	66

**Gjennomgå oppgaver  
markert rødt  
(dårligst besvarte)**

Karakterskala:

F
E
D
C
B
A

0 - - - - 40 | 41-52 | 53-64 | 65 - 76 | 77 - 88 | 89 - 100

Eksamen TFY4115 des 2015, opg. 1  
*Flervalgs - de dårligst besvarte:*

Oppgave	Snittresultat
1-9	45 %
1-10	52 %
1-11	<b>36 %</b>
1-14	54 %
1-15	51 %
1-16	<b>32 %</b>
1-20	47 %
1-23	61 %
1-24	55 %

*Avgitte svar:*

**Rett svar**

Opg:	9	10	11	14	15	16	20	23	24
A	43	20	73	11	36	67	18	3	31
B	85	39	43	72	108	65	16	4	5
C	4	115	54	119	1	25	20	29	1
D	12	13	14	4	39	29	98	125	5
E	3	32	6	3	9	6	34	7	108
blank	78	6	35	16	32	33	39	57	75
Sum	225	225	225	225	225	225	225	225	225
Snittres. %	45	52	36	54	51	32	47	61	55