

# Kap. 8

## Bevegelsesmengde. Kollisjoner. Massesenter.

### **Vi skal se på:**

- Newtons 2. lov på ny: Definisjon bevegelsesmengde
- Kollisjoner:
  - Kraftstøt, impuls. Impulsloven
  - Elastisk, uelastisk, fullstendig uelastisk
- Massesenter (tyngdepunkt)

# Kollisjoner skjer så raskt at vi *kan se bort fra* ytre krefter under kollisjonen

Hvor store er de **indre kreftene**  $F_{12} = F_{21}$  ?

$$m = 56 \text{ g}$$

$$v = 50 \text{ m/s} \rightarrow v = -50 \text{ m/s}$$

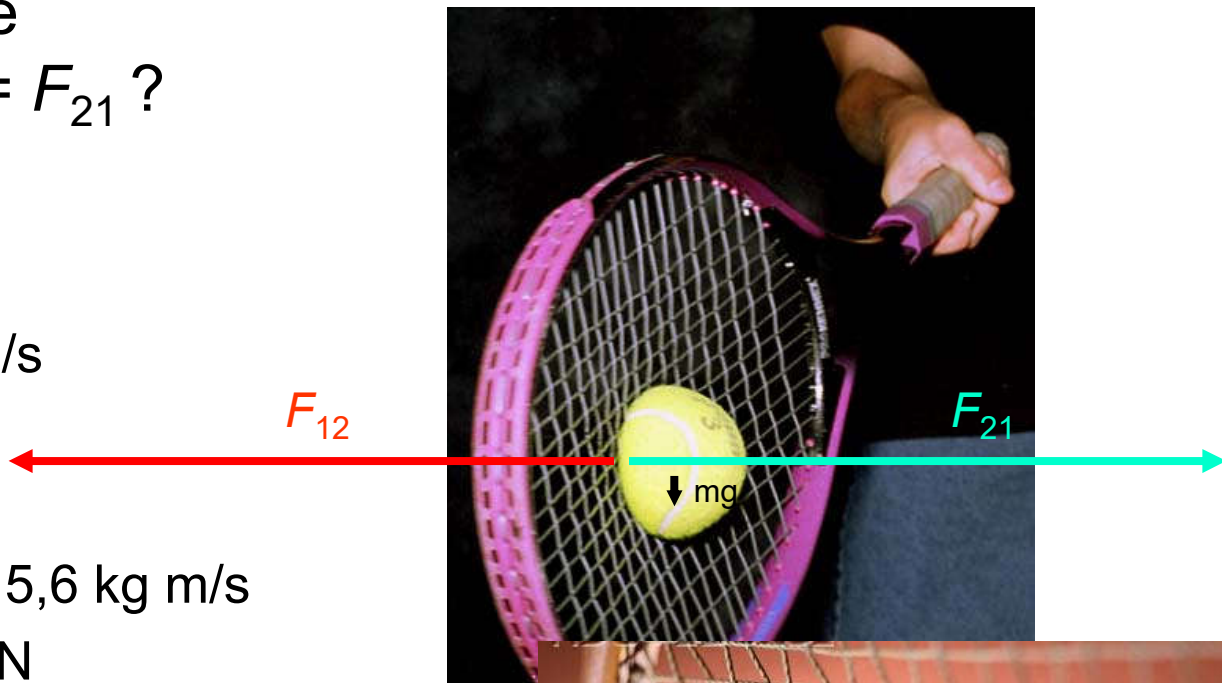
anta på  $t = 0,005 \text{ s}$

$$\Rightarrow \Delta p = 56 \text{ g} \cdot 100 \text{ m/s} = 5,6 \text{ kg m/s}$$

$$\Rightarrow \langle F \rangle = \Delta p / \Delta t = 1120 \text{ N}$$

$$F_{\text{max}} \approx 2000 \text{ N}$$

**Ytre kraft** = tyngde =  $mg = 0,56 \text{ N}$   
er forsvinnende liten



$F_{\text{max}}$  for stor



# Bevegelsesmengde. Kollisjoner. Massesenter.

- Bevegelsesmengde:  $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$
- Opprinnelig form Newton 2:  $\mathbf{F} = d\mathbf{p} / dt$
- **Kollisjoner:**
- Kraftstøt =  $\mathbf{J} = \int \mathbf{F} dt = \Delta\mathbf{p}$  (impulsloven)  $\sum \mathbf{F}_{\text{ytre}} = 0$
- Ingen ytre krefter  $\Rightarrow \mathbf{p}_{\text{tot}} = \text{konstant}$ 
  - Kraftstøt motsatt like stort på hvert legeme

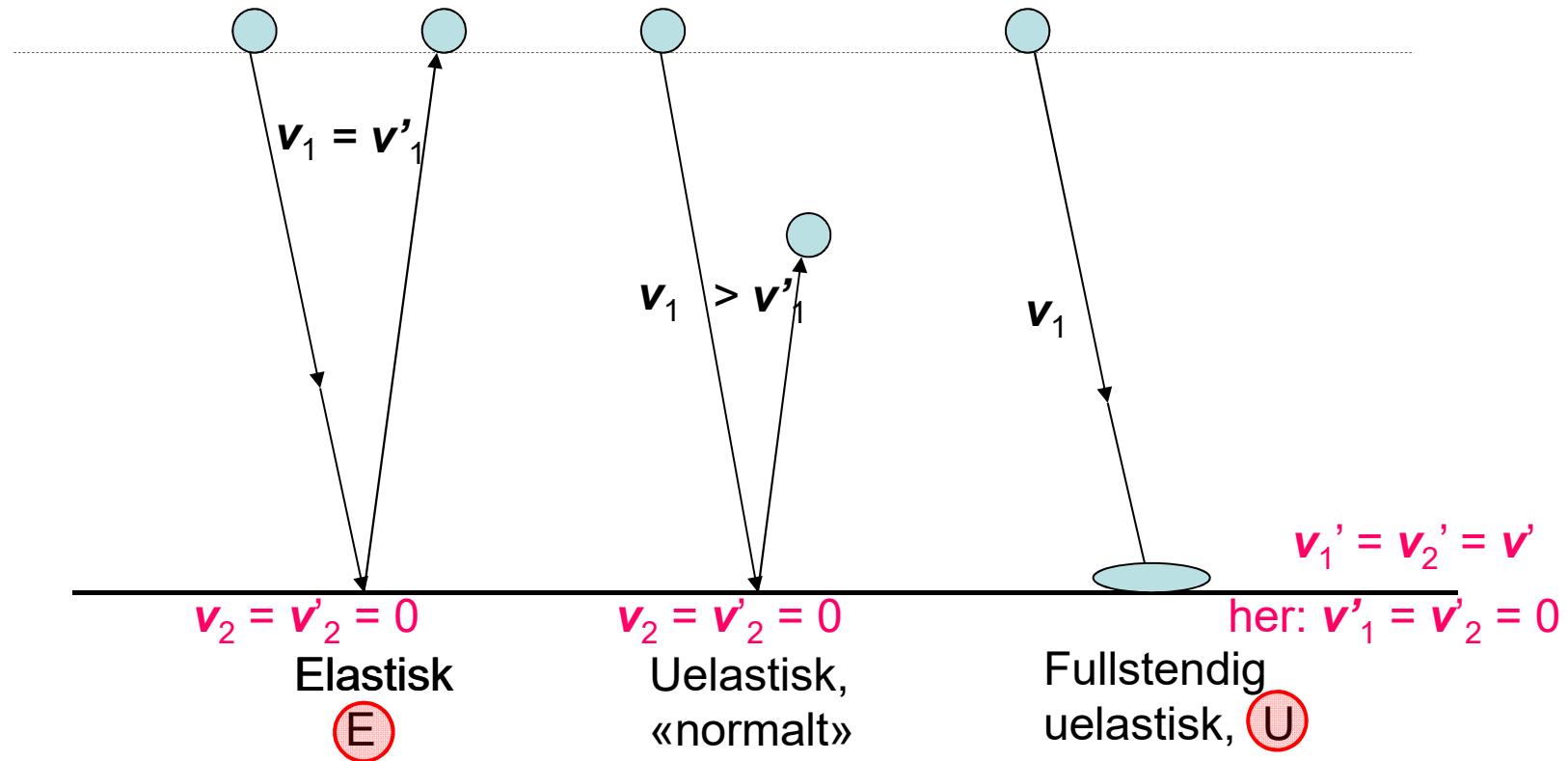


- **Tilleggslikninger:**

- **E** Elastisk støt: *Kinetisk energi bevart*
- **U** Fullstendig Uelastisk støt: *Felles slutfart* (energi avtar)
- Et «normalt» støt noe mellom E og U (energi avtar).

# Tre klasser kollisjoner

(eksempel: kast mot golv)



Alle kollisjoner:  $m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2$

# Tilsynelatende er ikke bev.mengde bevart i kollisjonen mot golvet:

F.eks. Fullstendig uelastisk:

Før:  $p = m_1 v_1$

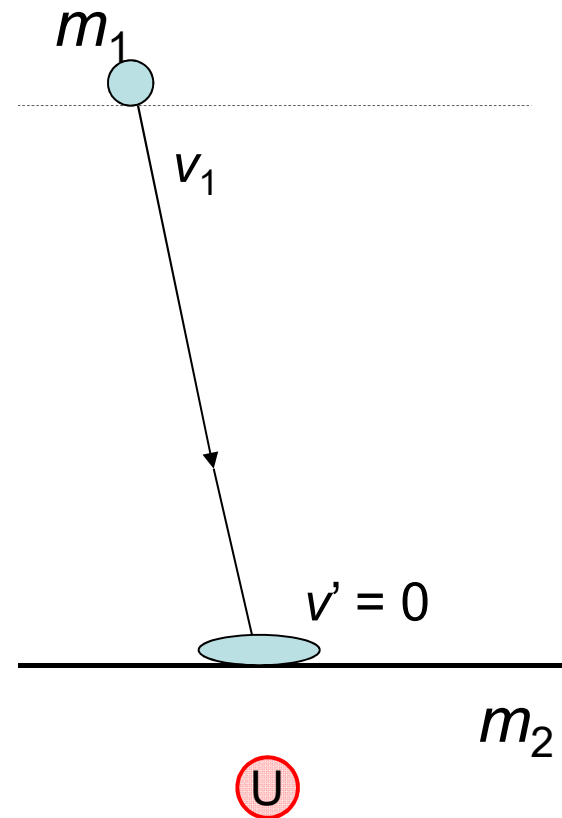
Etter:  $v' = 0 \Rightarrow p' = 0$

Likevel er  $p$  bevart!

$m_2$  (golv)  $\gg m_1$

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v' \approx \infty \cdot 0$$

!!



# Så langt om kollisjoner:

- Antar ingen ytre krefter i selve kollisjonen  
=> Bevegelsesmengde er bevart:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2$$

## Tilleggslikning elastisk støt:

- Kinetisk energi bevart:

$$m_1 \mathbf{v}_1^2 + m_2 \mathbf{v}_2^2 = m_1 \mathbf{v}'_1^2 + m_2 \mathbf{v}'_2^2$$

med generell løsning:

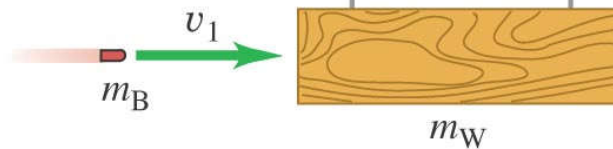
$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$
$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_2 + m_1}$$

## Tilleggslikning fullstendig uelastisk støt:

- Felles slutfart:  $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}'_2$

# Y&F: Ex. 8.8: Fullstendig uelastisk støt "Ballistisk pendel":

BEFORE COLLISION



To ukjente:

$v_1$  og fellesfarten  $v' = v_1' = v_2'$

To likninger:

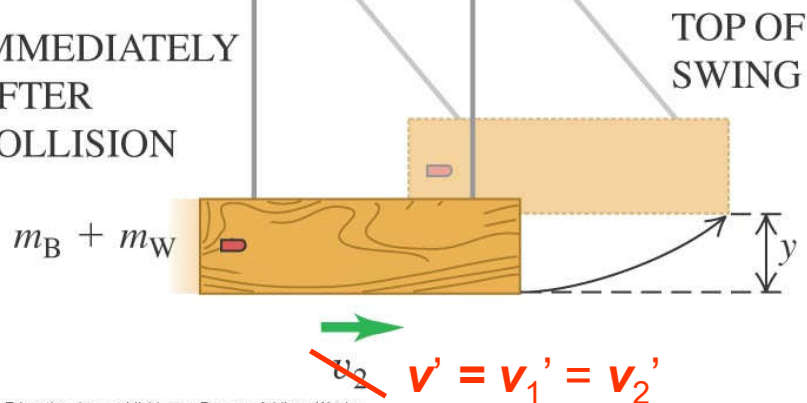
Bev.mengdebevarelse under støtet:

$$m_B v_1 + m_W \cdot 0 = (m_B + m_W) v'$$

Energibevarelse under oppsvinget:

$$\frac{1}{2} (m_B + m_W) v'^2 = (m_B + m_W) g y$$

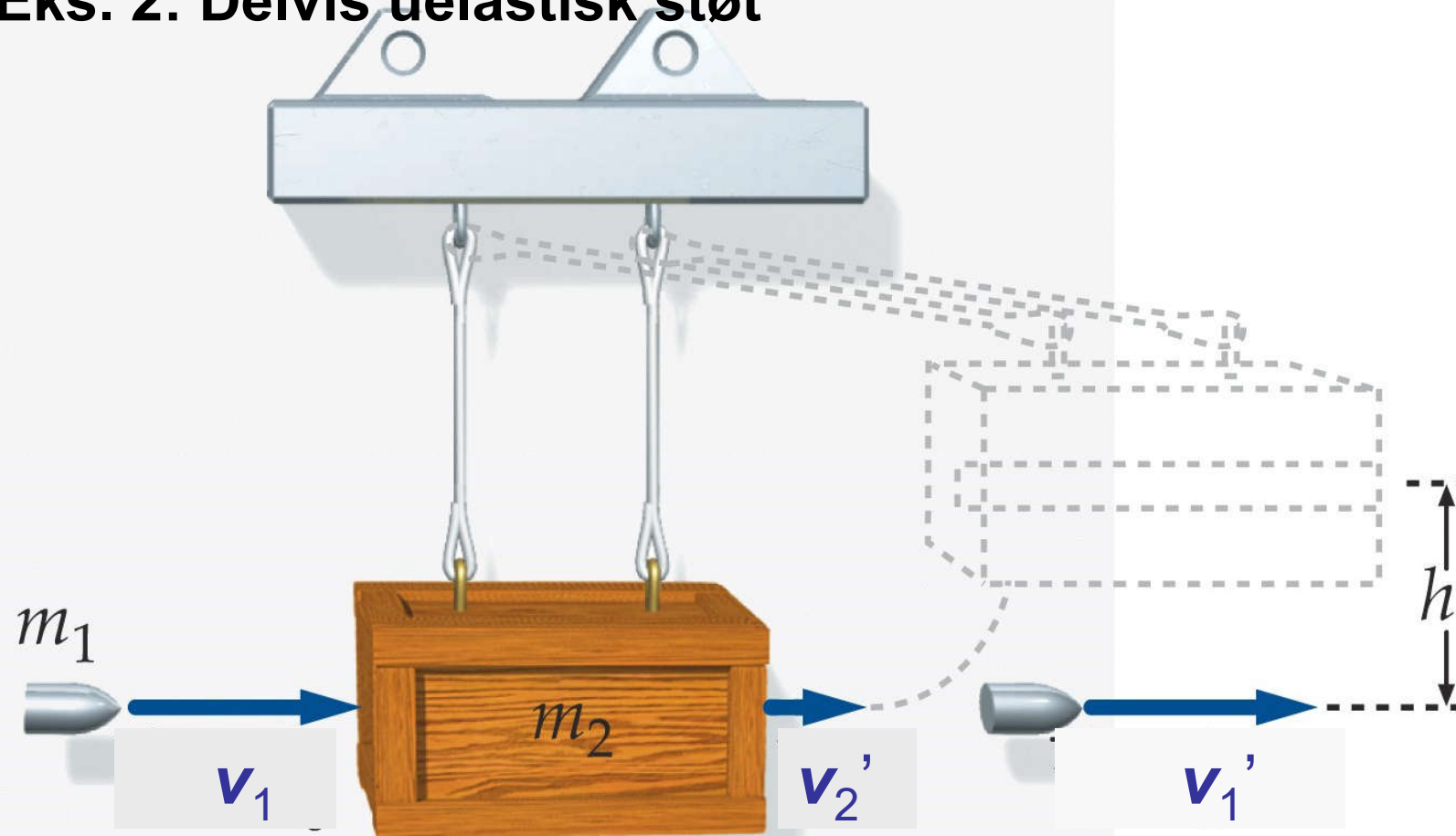
IMMEDIATELY  
AFTER  
COLLISION



IKKE energibevaring under støtet:

$$\frac{1}{2} (m_B + m_W) v'^2 < \frac{1}{2} m_B v_1^2$$

## Eks. 2: Delvis uelastisk støt



Tre ukjente: Før støt:  $v_1$  . Etter støt:  $v_1'$  og  $v_2'$

To likninger:      Bev.mengdebevarelse under støtet (1)

                          Energibevarelse under oppsvinget (2)

Tilleggsopplysning: F.eks. oppgitt kulas fart etter støtet:  $v_1' = \frac{1}{2} v_1$  (3)  
(evt. kunne tap i energi vært oppgitt)



# Massesenter (tyngdepunkt)

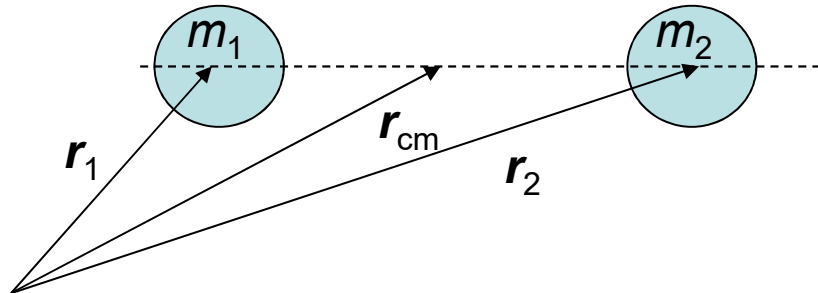
- *Punktpartikkel*: all masse i ett punkt
- *Flerpartikkelsystem*:  
Legeme =  $\sum$  punktpartikler  
(nødvendig mhp. rotasjon, bøying, deformasjon)

Y&F kap. 8.5  
L&L kap. 5.6

# Massesenter

-- for to partikler:

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$$



# Massesenter

Y&F kap. 8.5

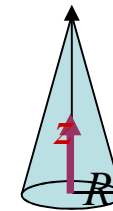
L&L kap. 5.6

- Topartikkelsystem  $\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$

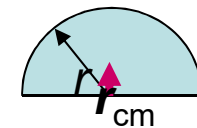
- $N$ -partikkelsystem  $\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$  (8.29)

- Kontinuerlig  $\vec{r}_{cm} = \frac{\int_{legeme} \vec{r} \cdot dm}{\int_{legeme} dm} = \frac{1}{M} \int_{legeme} \vec{r} \cdot dm$  (8.29B)

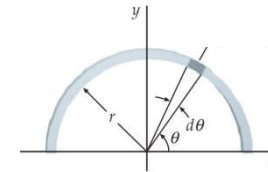
3-dim: Integrasjon over volum:  $dm = \rho dV$ . Eks:



2-dim: Integrasjon over plan:  $dm = \sigma dA$ . Eks:



1-dim: Integrasjon langs linje:  $dm = \lambda ds$ . Eks:

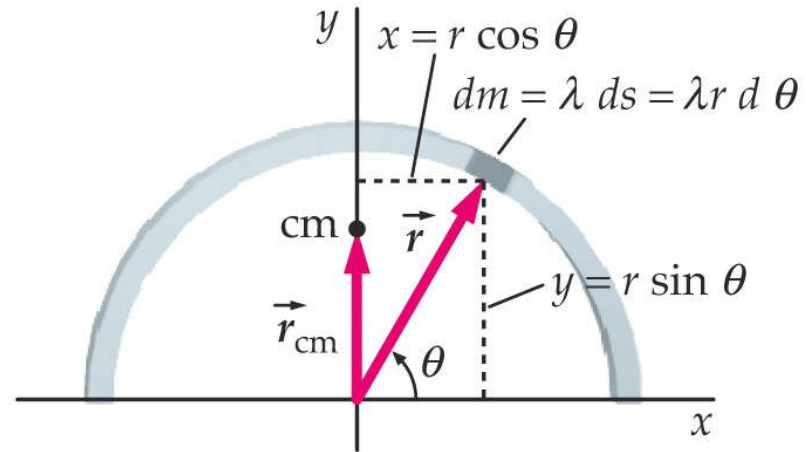


# Eksempler massesenter

## Halvsirkel

$$dm = \lambda ds$$

$$[\lambda] = \text{kg} / \text{m}$$

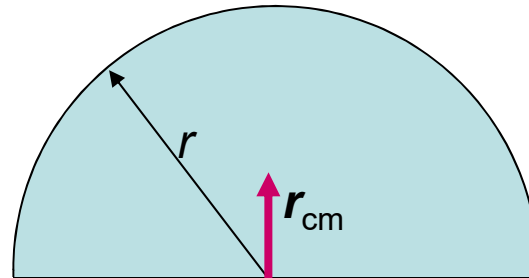


$$y_{cm} = r \frac{2}{\pi} = 0,64 r$$

## Halv sirkelplate:

$$dm = \sigma dA$$

$$[\sigma] = \text{kg} / \text{m}^2$$

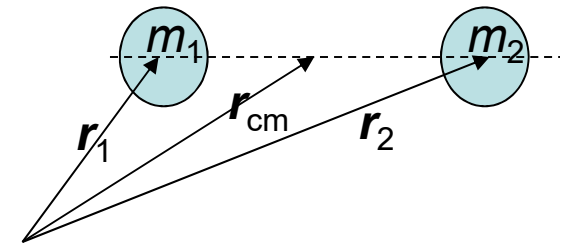
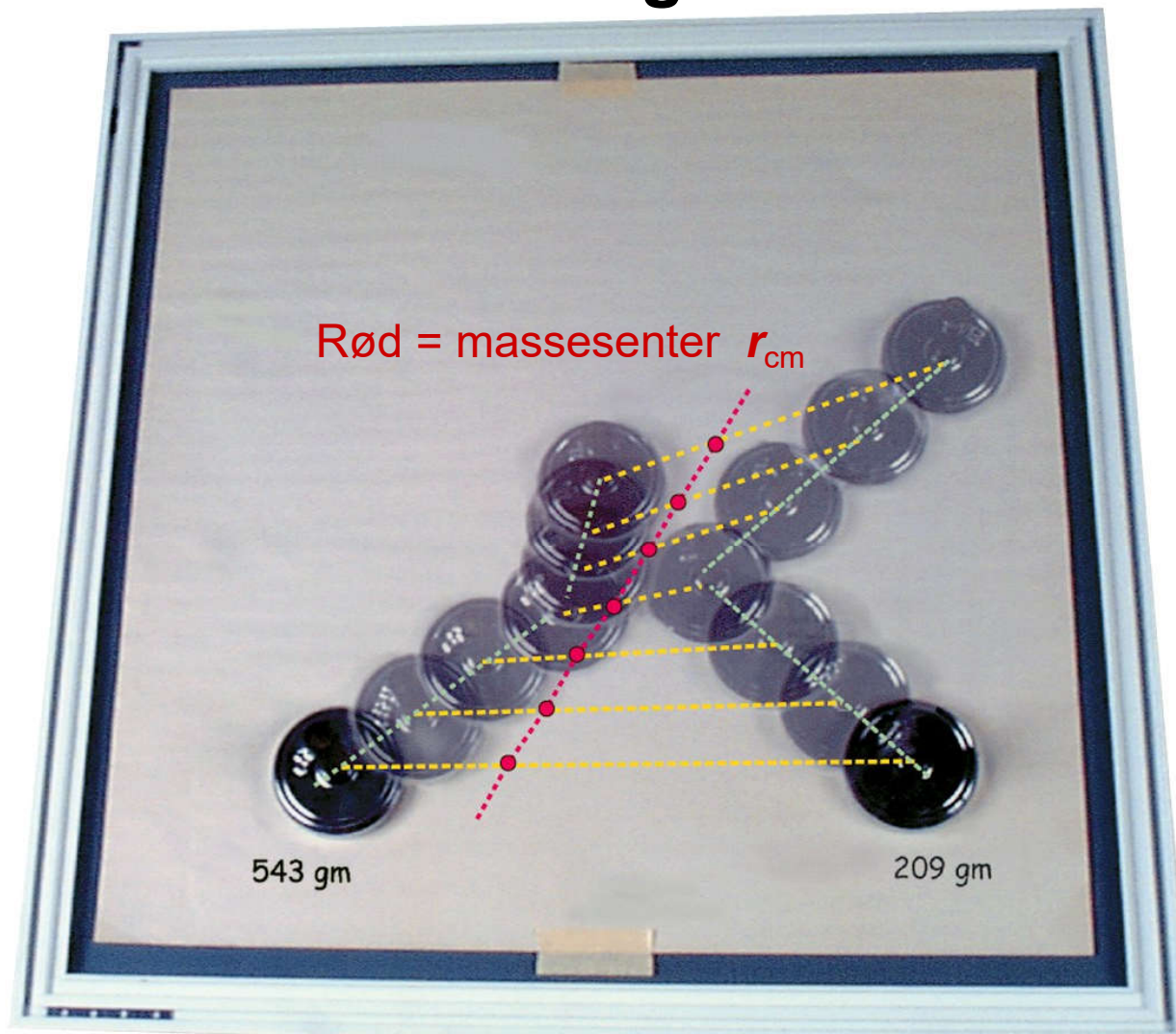


$$y_{cm} = r \frac{4}{3\pi} = 0,42 r$$

# Massesenter

- *Tyngdepunkt = massesenter*  
dersom tyngdeaksel.  $\mathbf{g}$  er lik over hele legemet  
  
(Eiffeltårnet 300 m: tyngdepkt ca 7 mm lavere enn cm)
- Newtons lov for massesenter:  $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = M\mathbf{a}_{\text{cm}}$

# Fullstendig elastisk støt



Ingen ytre krefter  $\Rightarrow M \frac{d}{dt} r_{cm} = F_{ext} = 0$

$\Rightarrow$  Massesenteret  $r_{cm}$  fortsetter upåvirket under støtet.

Relativbevegelsen (gult) endres under støtet.

Oppgave:

Ei kule skytes inn i en trekloss som farer opp i lufta (fullst. uelastisk støt).

Kula treffer ved A, B eller C.

Hvilket treff løfter treklossen til største høyde  $h$ ?

Svar:

Like høyt for alle.

Bevegelsesmengde bevart:

Alltid samme fart for klossen:

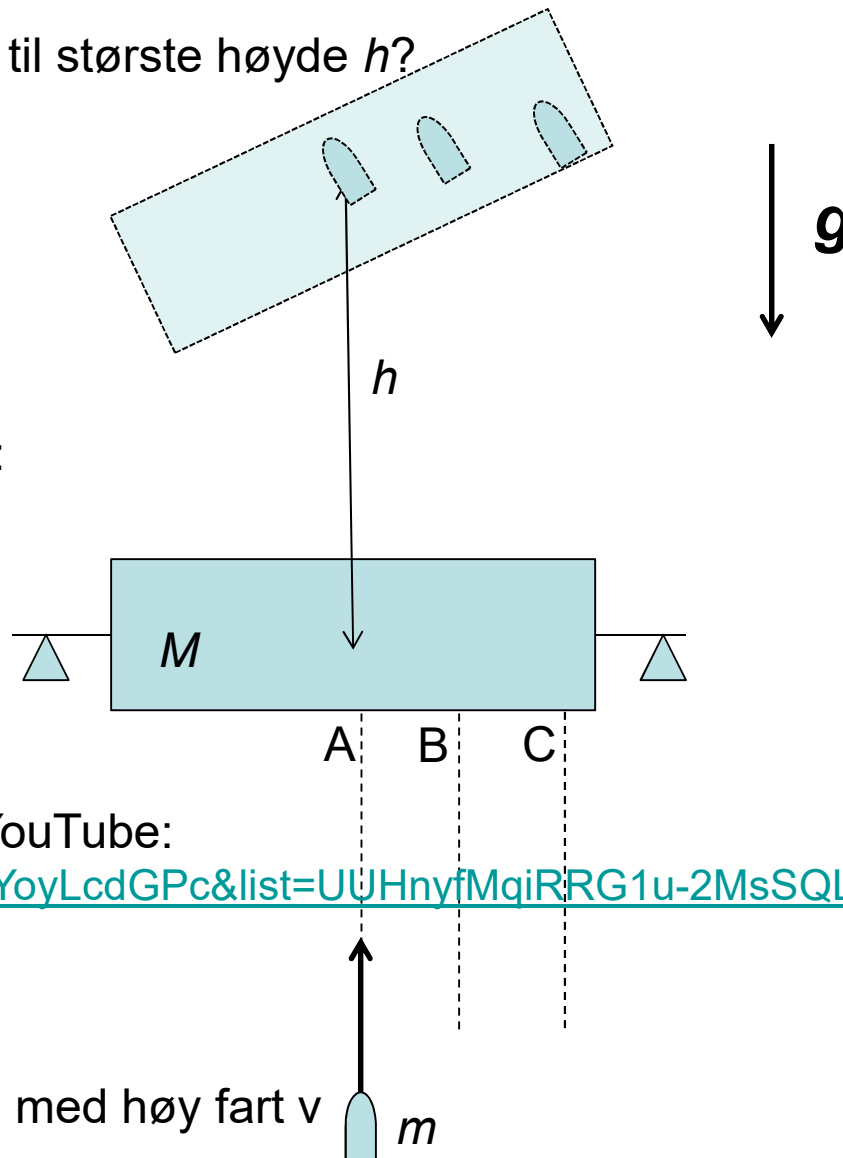
$$mv = (M+m)V_{\text{cm}}$$

I tillegg kommer rotasjon ved B og C (mest ved C)

Demonstrert og forklart på YouTube:

[www.youtube.com/watch?v=BLYoyLcdGPc&list=UUHnyfMqiRRG1u-2MsSQLbXA](http://www.youtube.com/watch?v=BLYoyLcdGPc&list=UUHnyfMqiRRG1u-2MsSQLbXA)

Kule med høy fart  $v$



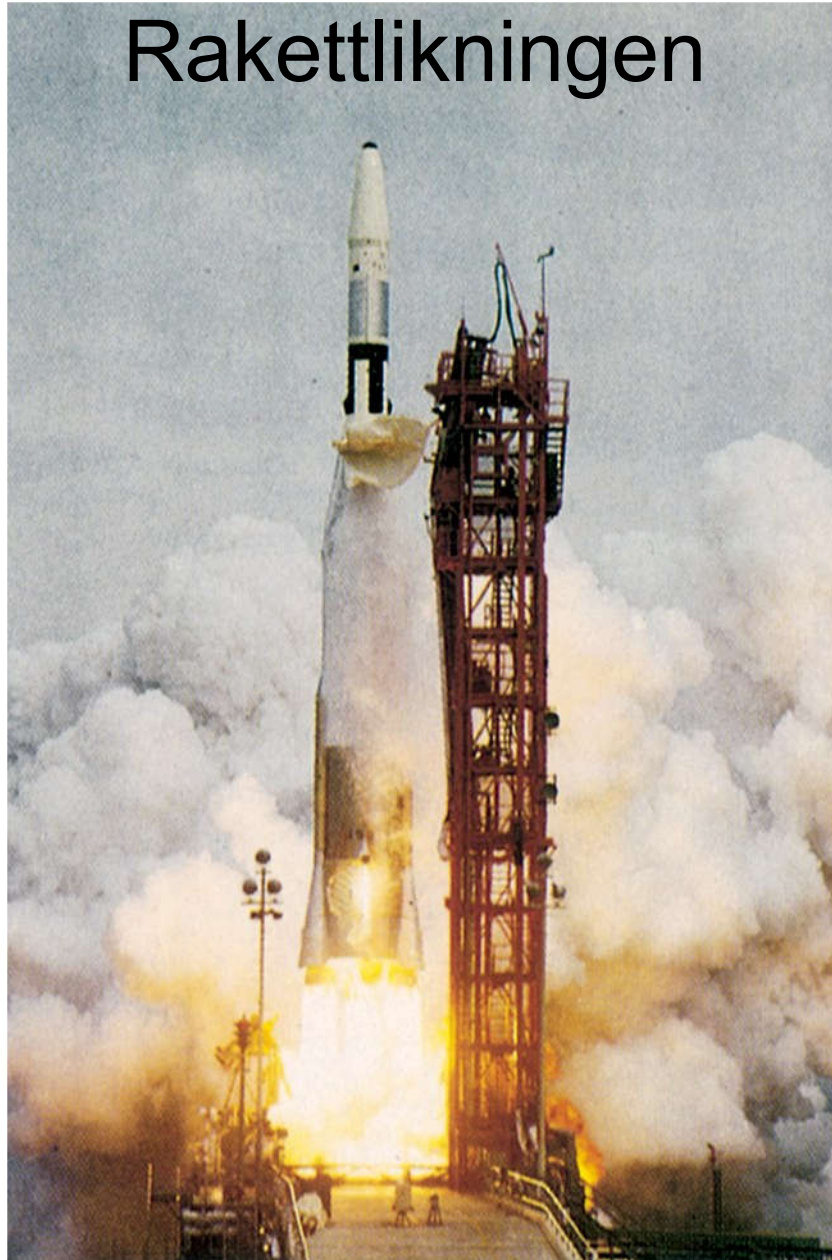
# Massesenter

- *Tyngdepunkt = massesenter*  
dersom tyngdeaksel.  $\mathbf{g}$  er lik over hele legemet
- Newtons lov for massesenter:  $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = m\mathbf{a}_{\text{cm}}$
- Tyngdens pot. en:  $E_p = gM z_{\text{cm}}$



# Variabel masse

## Rakettlikningen



Y&F kap. 8.6  
L&L kap. 5.4

Rakettlikningen ikke  
pensum

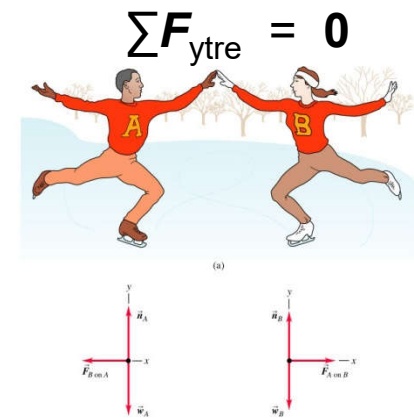
Kun som eksempel  
i oppgave:

Øving 4, opg. 5

# Kap. 8. Oppsummert.

## Bevegelsesmengde. Kollisjoner. Massesenter.

- Massesenter  $\mathbf{r}_{\text{cm}} = \int \mathbf{r} dm/M$ .
- Bevegelsesmengde:  $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$
- Opprinnelig form Newton 2:  $\mathbf{F} = d\mathbf{p} / dt$
- Kraftstøt =  $\mathbf{J} = \int \mathbf{F} dt = \Delta\mathbf{p}$  (impulsloven = Newton2)
- Ingen ytre krefter  $\Rightarrow \mathbf{p}_{\text{tot}} = \text{konstant}$ 
  - Kraftstøt motsatt like stort på hvert legeme
- **Kollisjoner.**
- **Tilleggslikninger:**
  - **E** Elastisk støt: *Kinetisk energi bevart*
  - **U** Fullstendig Uelastisk støt: *Felles slutfart* (energi avtar)
  - Et «normalt» støt noe mellom E og U (energi avtar).
- Newtons lov for massesenter:  $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = m\mathbf{a}_{\text{cm}}$
- Tyngdens pot. en:  $E_p = gM z_{\text{cm}}$



# Kap 8. Oppsummert: Massesenter

- *Punktpartikkel*: all masse i ett punkt

- *Flerpartikkelsystem*:

Legeme =  $\sum$  punktpartikler

(nødvendig mhp. rotasjon, bøyning, deformasjon)

- *Massesenter  $\vec{r}_{cm}$* :

- Topartikkelsyst.

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$$

- *N-partikkelsyst.*

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (8.29)$$

- Kontinuerlig

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int_{legeme} \vec{r} \cdot dm}{\int_{legeme} dm} = \frac{1}{M} \int_{legeme} \vec{r} \cdot dm \quad (8.29B)$$

- *Tyngdepunkt = massesenter* dersom  $\mathbf{g}$  er lik over hele legemet

1-dim: Integrasjon langs linje:  $dm = \lambda ds$ .

2-dim: Integrasjon over plan:  $dm = \sigma dA$ .

3-dim: Integrasjon over volum:  $dm = \rho dV$ .