Translasjon:	Rotasjon:
Bevegelsesmengde (linear momentum): $\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v}$	Spinn (angular momentum): $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\,\boldsymbol{v}$ $\boldsymbol{L} = I\ \boldsymbol{\omega}$ Stivt legeme om sym.akse
N2-trans: $\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$ "Stivt" legeme (konst. m): $\boldsymbol{F} = m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = m\,\boldsymbol{a}$	N2-rot (spinnsatsen): $\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ Stivt legeme om sym.akse (konst. I): $\boldsymbol{\tau} = I\ \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t = I\,\alpha$
$\boldsymbol{F} = 0$ => $\boldsymbol{p} =$ konstant (N1) "stivt" legeme: $\boldsymbol{v} =$ konst	$\boldsymbol{\tau} = 0$ => $\boldsymbol{L} =$ konstant (N1-rot) stivt legeme om sym.akse: $\boldsymbol{\omega} =$ konst

Kollisjoner

Kap. 8:

Kollisjoner med translasjonsbevegelse:

Ingen ytre krefter => $\boldsymbol{p}$ = bevart i kollisjonen

$\sum \boldsymbol{F}_{\text{ytre}} = \mathbf{0}$

Nå:

Kollisjoner med translasjon og rotasjon

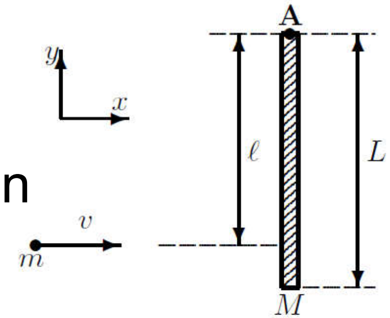
Ingen ytre krefter => $\boldsymbol{p}$ = bevart i kollisjonen

$\sum \boldsymbol{F}_{\text{ytre}} = \mathbf{0}$

Ingen ytre kraftmoment => $\boldsymbol{L}$ = bevart i kollisjonen

$\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ytre}} = \mathbf{0}$

VIKTIG: $\boldsymbol{\tau}$ og $\boldsymbol{L}$ beregnet om samme akse



Øving 5. Oppgave 4:

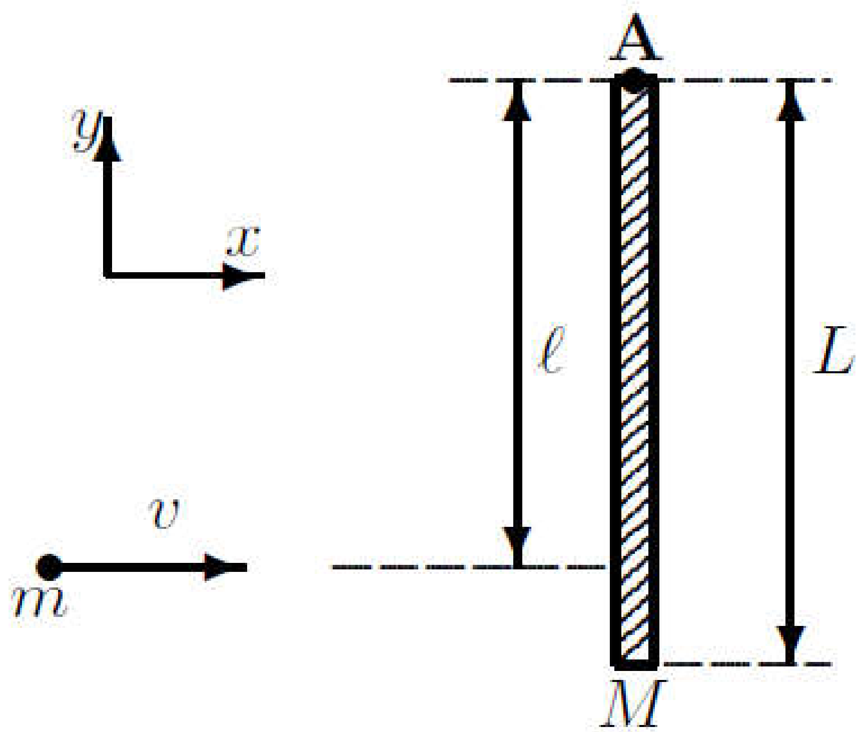
Kule skytes inn i stav som er hengslet ved A.

Er ytre krefter lik null? NEI

Kraft fra aksling A på staven under kollisjonen

Er ytre kraftmoment lik null? JA

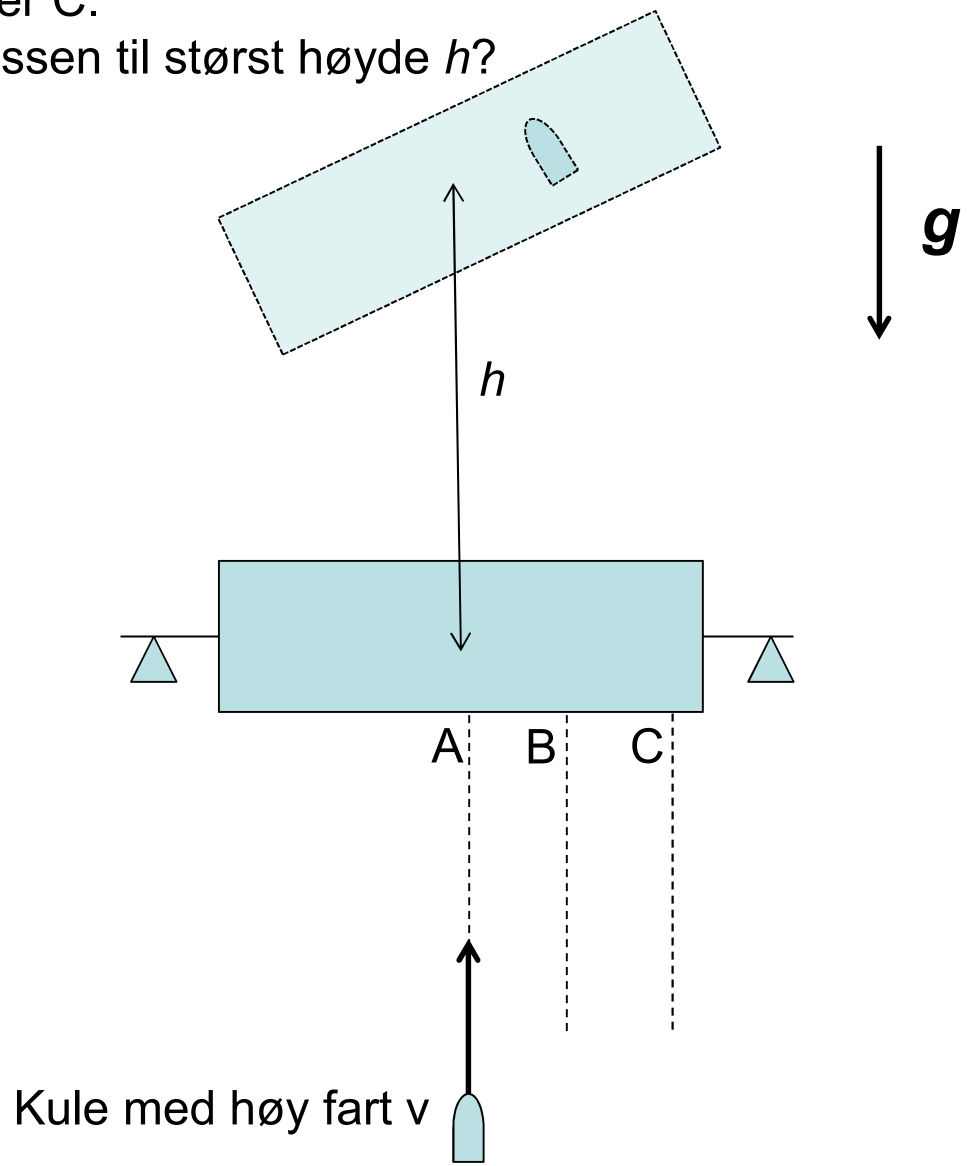
Akslingskraft har null moment om A



Fra kap.8. Kollisjoner:

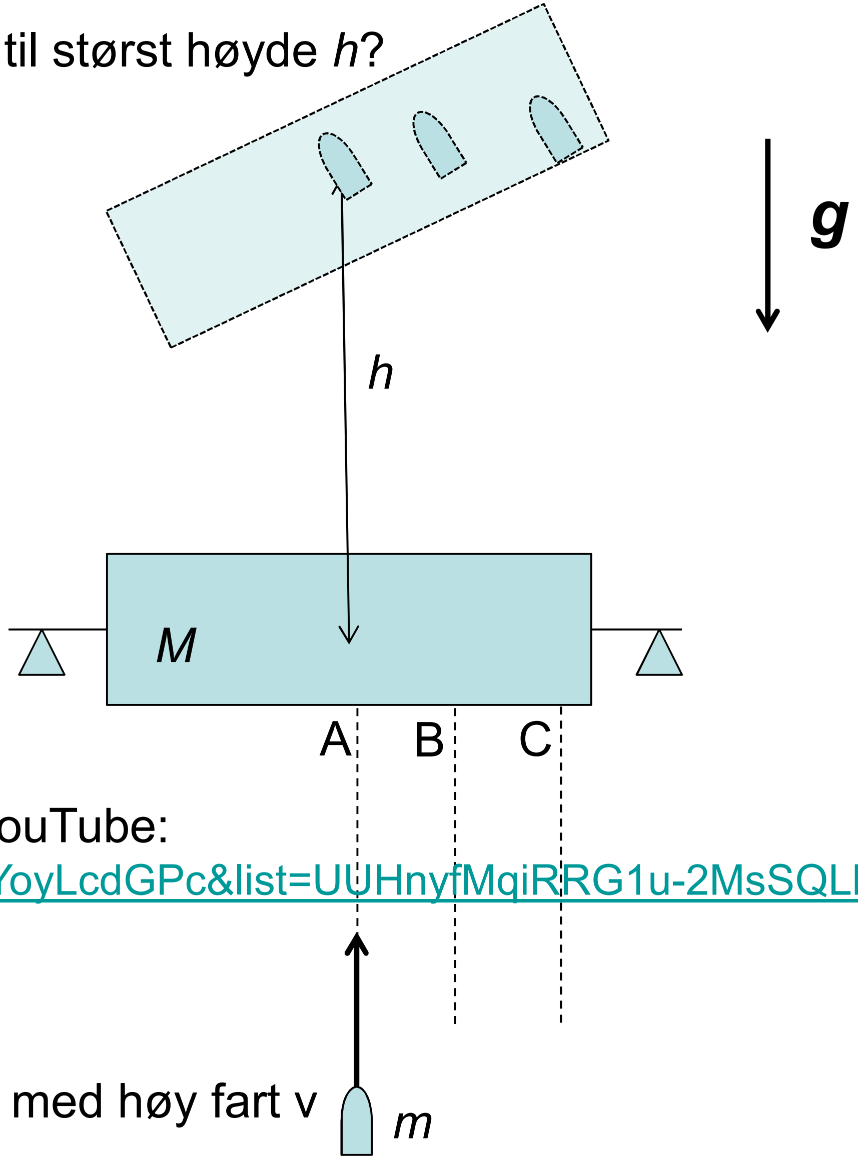
Oppgave:
Ei kule skytes inn i en trekloss som farer opp i lufta (fullst. uelastisk støt).
Kula treffer ved A, B eller C.
Hvilket treff løfter treklossen til størst høyde *h*?

Eks. 4



Fra kap.8. Kollisjoner:

Oppgave:
Ei kule skytes inn i en trekloss som farer opp i lufta (fullst. uelastisk støt).
Kula treffer ved A, B eller C.
Hvilket treff løfter treklossen til størst høyde *h*?



Svar:
Like høyt for alle.
Bevegelsesmengde bevart:
Alltid samme fart for klossen:

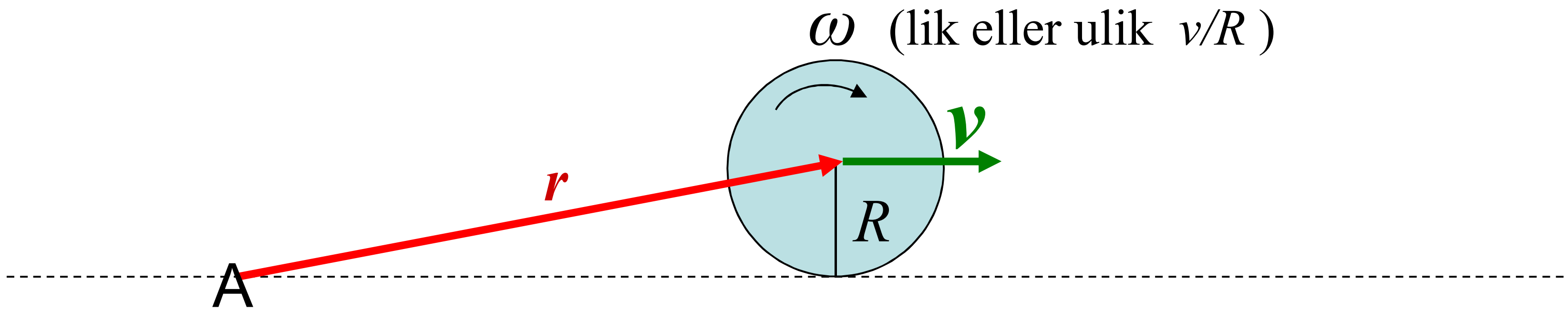
$$mv = (M+m)V_{cm}$$

I tillegg kommer rotasjon ved B og C (mest ved C)

Demonstrert og forklart på YouTube:
www.youtube.com/watch?v=BLYoyLcdGPc&list=UUHnyfMqiRRG1u-2MsSQLbXA

Kule med høy fart v

Totalt spinn – ved rulling og skliing.



(Totalt) spinn om A:

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{A}} = \boldsymbol{r} \times m\,\boldsymbol{v} + I_0\boldsymbol{\omega}$$

$$= \text{banespinn} + \text{egenspinn}$$

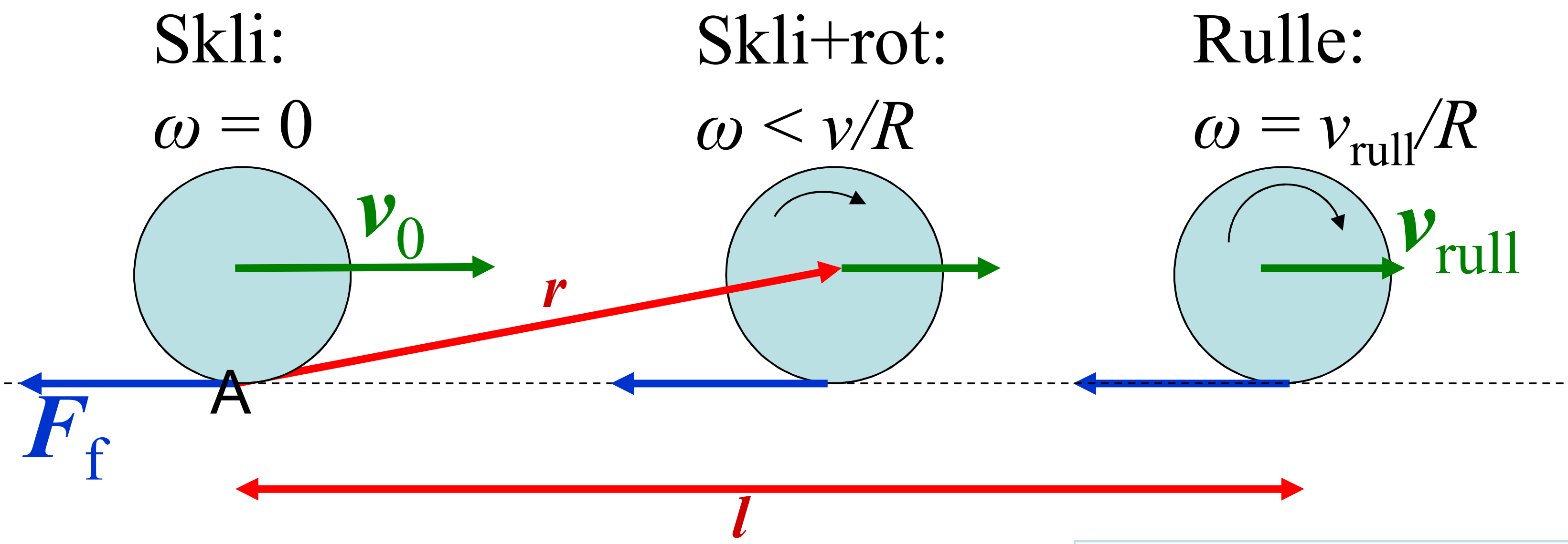
Bevis i notatet «Totalspinn».

Presentert i Lien og Løvhøiden kap 6.6 og eks. 6.15.

Ikke eksplisitt behandlet i Young & Freedman.

Brukes i Øving 7, oppgave 1. Nå i et forelesningseksempel.

Eks. 6. Bowlingkule (L&L Eks. 6.15)



c) Hvor langt, l, før ruller?
a) Hva er v ($=v_{\text{rull}}$) når ruller?
b) Hva er aksel, a, når sklir?

Om A: $\boldsymbol{L}_{\text{A}} = \boldsymbol{r} \times m\,\boldsymbol{v} + I_0\boldsymbol{\omega}$

Ingen krefter har moment

$$\Rightarrow \; L_{\text{A}} = \text{konst.} = mrv_0$$

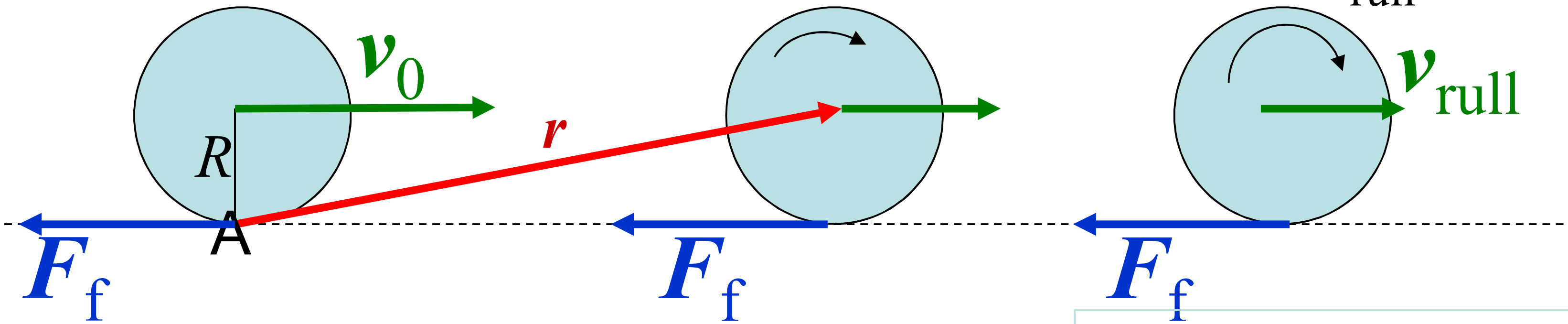
$$L_{\text{start}} = L_{\text{slutt}} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{rull}} = v_0 \cdot 5/7 \quad (*)$$ -- uten å kjenne F_{f} !

Eks. 6. Bowlingkule

Skli: $\omega = 0$

Skli+rot: $\omega < v/R$

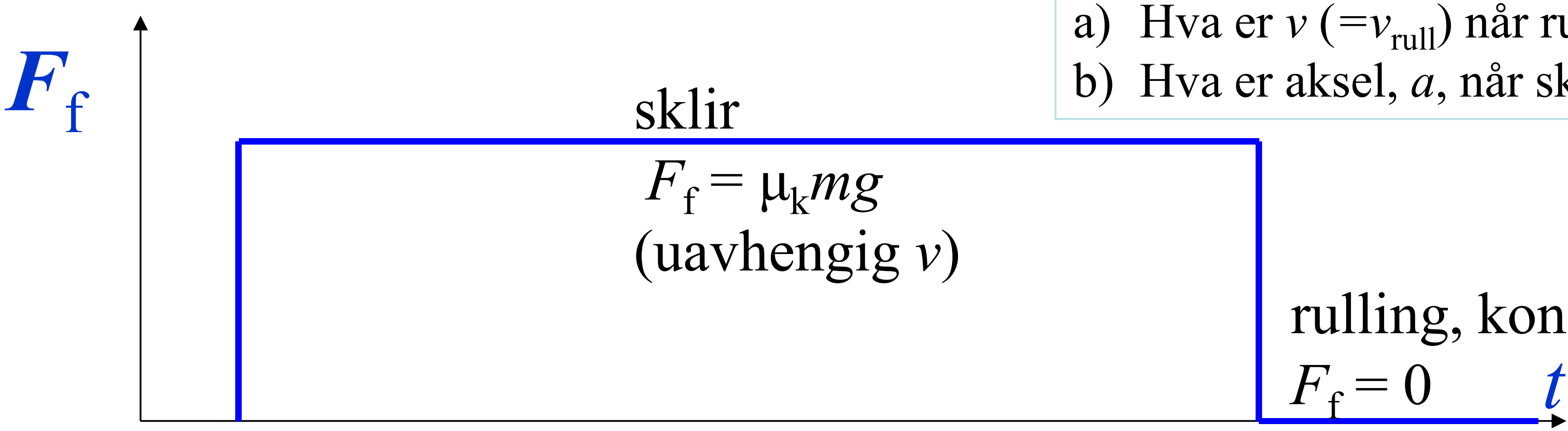
Rulle: $\omega = v_{rull}/R$



c) Hvor langt, l, før ruller?

a) Hva er v ($=v_{rull}$) når ruller?

b) Hva er aksel, a, når sklir?



Konst.a-likn:

$v^2 - v_0^2 = 2al$

$v = v_0 + at = v_0 - \mu_k g t$

$\omega = \omega_0 + \alpha\, t$

v_{rull} = konst.

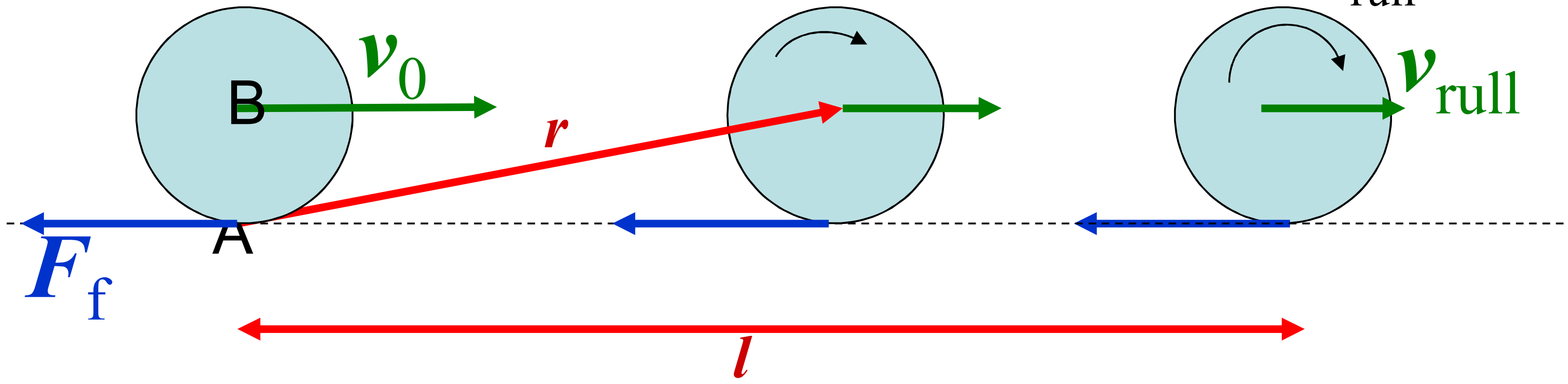
$\omega_{rull} = v_{rull}/R$ = konst.

Eks. 6. Bowlingkule (L&L Eks. 6.15)

Skli: $\omega = 0$

Skli+rot: $\omega < v/R$

Rulle: $\omega = v_{\text{rull}}/R$



Om A: $\boldsymbol{L}_{\text{A}} = \boldsymbol{r} \times m\, \boldsymbol{v} + I_0 \boldsymbol{\omega}$

Ingen krefter har moment

$\Rightarrow\ L_{\text{A}} = \text{konst.} = mrv_0$

$L_{\text{start}} = L_{\text{slutt}} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{rull}} = v_0 \cdot 5/7 \quad (*)$ -- uten å kjenne F_{f} !

d) α under skliing
e) Hvor lang tid t før rulling?

Om B: $\boldsymbol{L}_{\text{B}} = I_0 \boldsymbol{\omega}$

$\tau_{\text{B}} = F_{\text{f}} \cdot R$

$\Rightarrow\ L_{\text{B}}$ ikke konst. men $I_0\, d\omega/dt = F_{\text{f}} \cdot R$, må kjenne F_{f}

Arbeid ved rotasjon om fast akse

(Y&F 10.4, L&L 4.4.1)

$$dW = \tau \, d\theta$$

$$W = \Delta E_k = \Delta \tfrac{1}{2} I \omega^2$$

Effekt: $P = \tau \omega$

Arbeid ved translasjon

$$dW = F \, ds$$

$$W = \Delta E_k = \Delta \tfrac{1}{2} m v^2$$

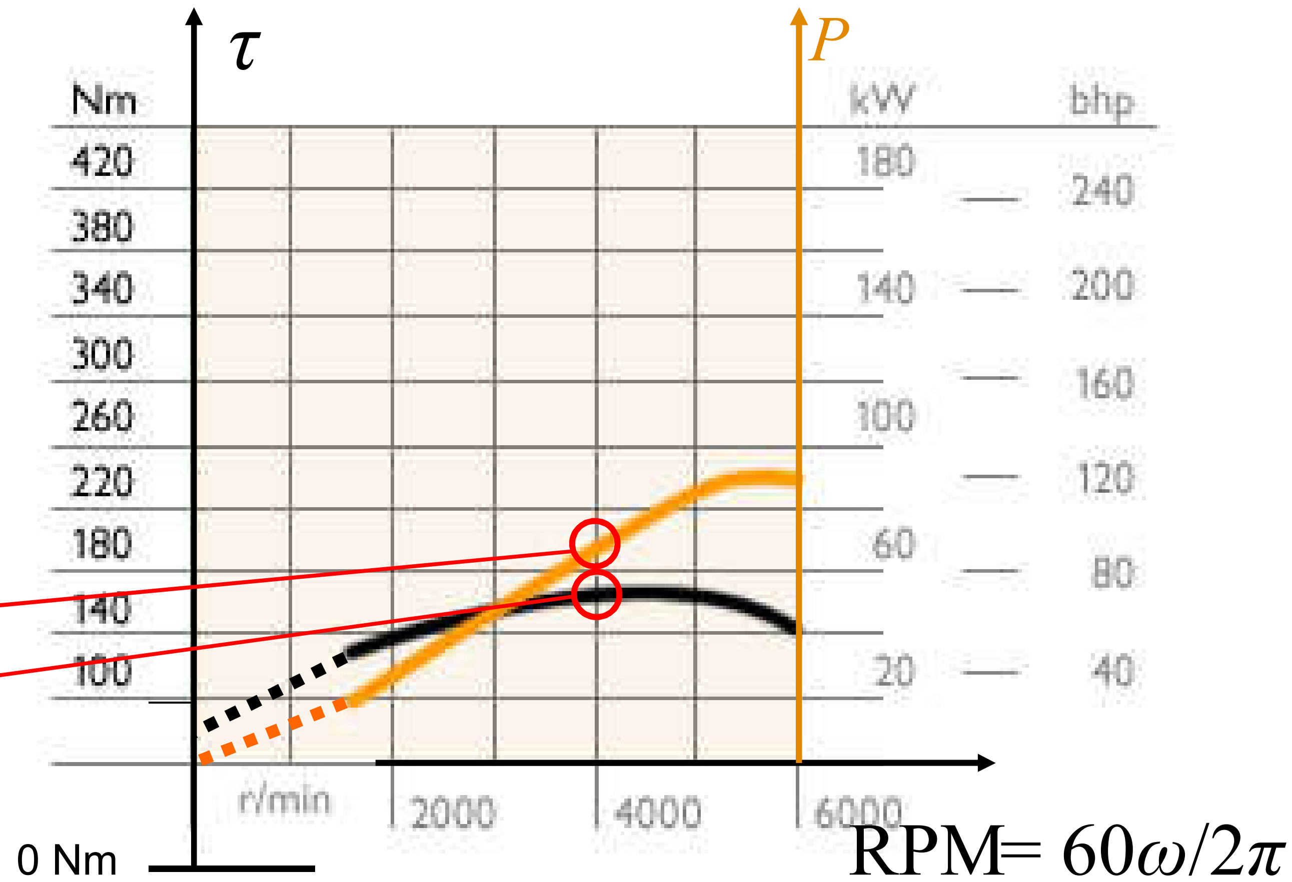
$$P = F v$$

Effekt = moment · vinkelhastighet

$$P = \tau \cdot \omega$$

f = 4000 RPM
P = 70 kW
τ = 160 Nm

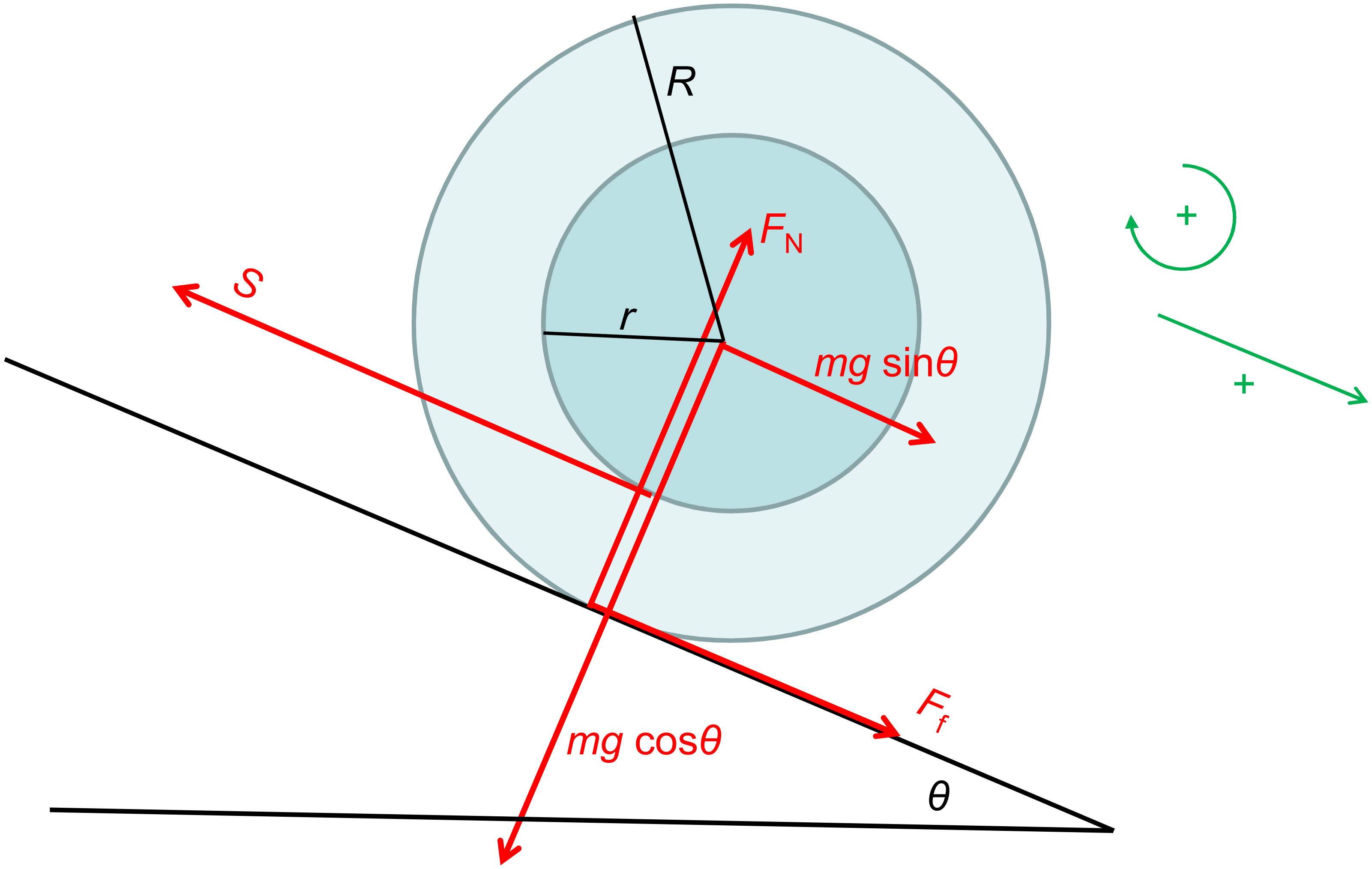
Stemmer med
$P = \tau \cdot \omega$



Saab 9-3 1.8i 122hk. Effekt og dreiemoment, diagram.
Den ***sorte kurven angir dreiemomentet i newton-meter*** *(Nm),*
den ***oransje angir effekten i kW*** *eller hestekrefter (bhp).*

Eks. 7. Slurende snelle, med snor på underside

Øv.6, opg.3: snor på overside



Konstant-akselerasjonslikninger

Translasjon:
(konstant akselerasjon a)

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2as$$

$$s - s_0 = \langle v \rangle t = \tfrac{1}{2}(v + v_0)\, t$$

Rotasjon om fast akse:
(konstant vinkelakselerasjon α)

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\varphi$$

$$\varphi - \varphi_0 = \langle \omega \rangle t = \tfrac{1}{2}(\omega + \omega_0)\, t$$

Kap. 9+10. Rotasjon. Oppsummering.

- Vinkelhastighet $\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$, vinkelakselerasjon $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$
- Sentripetalakselerasjon $a_c = -r\,\omega^2 = -\omega v = -v^2/r$
- Baneakselerasjon $a_\mathrm{t} = r \cdot \alpha$
- Rotasjonsenergi $E_\mathrm{k} = ½\, I\, \omega^2$
- Treghetsmoment $I = \Sigma\, r_\mathrm{i}^2\, m_\mathrm{i} \rightarrow \int r^2\, \mathrm{d}m$ (om en gitt akse)
- Dreiemoment: $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
- Spinn (dreieimpuls) = $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\, \boldsymbol{v}$ (om en gitt akse)

  Stivt legeme om sym. akse: $\boldsymbol{L} = I\, \boldsymbol{\omega}$
- Spinnsatsen: $\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{dt}$ (N2-rot)

  Stivt legeme om sym.akse: $\boldsymbol{\tau} = I\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$
- Friksjon er vesentlig for rulling:
  - rein rulling: statisk friksjon $F_\mathrm{f} \leq \mu_\mathrm{s} F_\mathrm{N}$. Friksjons**arbeidet** neglisjerbart
  - slure/gli: kinetisk friksjon $F_\mathrm{f} = \mu_\mathrm{k} F_\mathrm{N}$. Friksjonsarbeidet viktig
- Eksempler: rulling, gyroskop (sykkelhjul), barnekarusell, m.m.

Treghetsmoment (om en gitt akse):

$$I = \Sigma\, r_i^2\, m_i \;\rightarrow \int r^2\, \mathrm{d}m$$

Alle I_0 om massesentrum (cm):

- Ring om sentrum: $I_0 = M R^2$
- Ring om diameter: $I_0 = \frac{1}{2} M R^2$
- Sylinder eller skive om sentrum: $I_0 = \frac{1}{2} M R^2$
- Kule om diameter: $I_0 = (2/5)\, M R^2$
- Kuleskall om diameter: $I_0 = (2/3)\, M R^2$

    Legemer som kan rulle: $I_0 = c\, MR^2$ (c=1, ½, 2/5 etc.)

- Lang, tynn stav om midtpunkt: $I_0 = (1/12)\, M L^2$
- Rektangulær plate om midtpunkt: $I_0 = (1/12)\, M\, (a^2 + b^2)$

Om annen parallell akse i avstand d (Steiners sats):

$$I = I_0 + M\, d^2$$

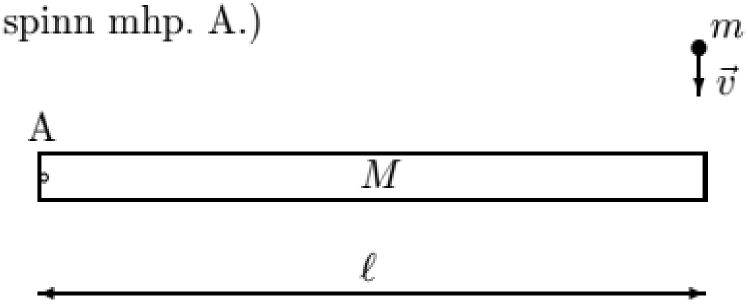
Se også Table 9.2 i Young & Freedman.

Kap. 9+10. Analogier translasjons- og rotasjonsbevegelser

Størrelse	Trans	Rot (vektor)	Rot (skalar)
Stedkoord.	$\vec{\boldsymbol{r}}$		θ
Hastighet	$\dot{\vec{\boldsymbol{r}}} = \vec{\boldsymbol{v}}$	$\dot{\vec{\boldsymbol{\theta}}} = \vec{\boldsymbol{\omega}}$	$\dot{\theta} = \omega$
Akselerasjon	$\ddot{\vec{\boldsymbol{r}}} = \vec{\boldsymbol{a}}$	$\ddot{\vec{\boldsymbol{\theta}}} = \vec{\boldsymbol{\alpha}}$	$\ddot{\theta} = \alpha$
"Kraft"	$\vec{\boldsymbol{F}}$	$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}$	$\tau = rF \sin\theta$
"Masse"	m		$I = \int r^2 \mathrm{d}m$
"Bev.mengde"	$\vec{\boldsymbol{p}} = m\, \dot{\vec{\boldsymbol{r}}}$	$\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{p}} = I\, \vec{\boldsymbol{\omega}}$	$L = rp \sin\theta = I\, \omega$
Kin. energi	$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m\, v^2$		$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} I\, \omega^2$
Arbeid	$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$	$\mathrm{d}W = \vec{\tau} \cdot \mathrm{d}\vec{\theta}$	$\mathrm{d}W = \tau\, \mathrm{d}\theta$
Effekt	$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$	$P = \tau\, \omega$
Newton 2	$\vec{\boldsymbol{F}} = \dot{\vec{\boldsymbol{p}}} = m\, \ddot{\vec{\boldsymbol{r}}}$	$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\vec{\boldsymbol{L}}} = I\, \ddot{\vec{\boldsymbol{\theta}}}$	$\tau = I\, \ddot{\theta}$
Newton 1	$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{0}} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{v}} = \text{konst}$	$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{0}} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{\omega}} = \text{konst}$	

Fra eksamen des 2014:

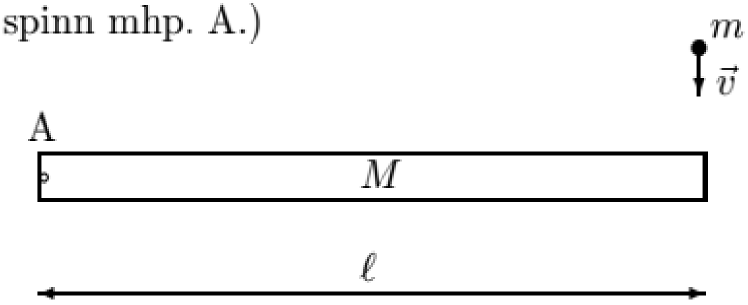
1-5. Ein stav med masse M og lengd ℓ ligg på eit bord og kan dreie friksjonsfritt om ein loddrett akse A i stavens eine endepunkt. Aksen er fast i bordet. I figuren er staven sett ovanfrå. En pistolkule med masse m og horisontal fart v treffer stavens andre endepunkt 90° på stavens lengderetning og absorberast straks i stavmaterialet (fullstendig uelastisk støt). Dermed settast staven (med kule) i rotasjon. For systemet staven + kule, kva for storleik(ar) endrar seg ikkje frå før til etter kollisjonen? (Her er E systemets kinetiske energi, p systemets rørslemengd og L systemets spinn mhp. A.)



A) L og E
B) L og p
C) L, E og p
D) Berre L
E) Berre p

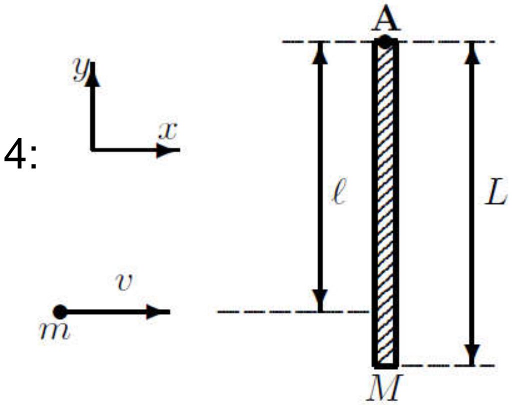
Fra eksamen des 2014:

1-5. Ein stav med masse M og lengd ℓ ligg på eit bord og kan dreie friksjonsfritt om ein loddrett akse A i stavens eine endepunkt. Aksen er fast i bordet. I figuren er staven sett ovanfrå. En pistolkule med masse m og horisontal fart v treffer stavens andre endepunkt 90° på stavens lengderetning og absorberast straks i stavmaterialet (fullstendig uelastisk støt). Dermed settast staven (med kule) i rotasjon. For systemet staven + kule, kva for storleik(ar) endrar seg ikkje frå før til etter kollisjonen? (Her er E systemets kinetiske energi, p systemets rørslemengd og L systemets spinn mhp. A.)



A) L og E
B) L og p
C) L, E og p
D) Berre L
E) Berre p

Samme problem
i øving 5, oppgave 4:



Svar avgitt:

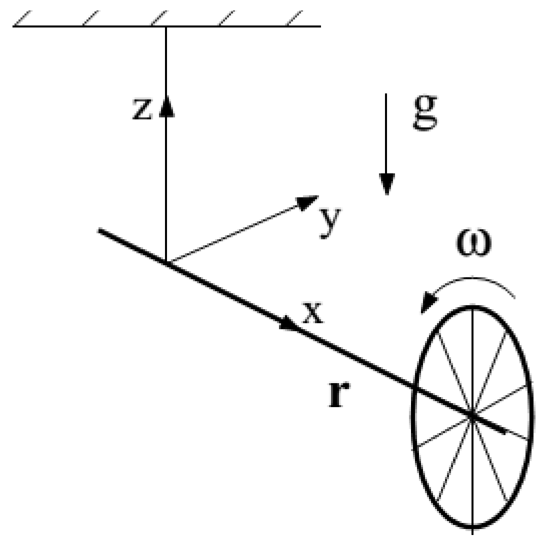
A	5
B	96
C	4
D	75
E	17
blank	3
Tot.	200

Snitt 38%, dvs. F

Fra eksamen des 2014:

1-6. Eit sykkelhjul settast i rask rotasjon og hengast opp i ei snor festa til akslingen. Figuren syner hjulet med overdrevet lang aksling og med koordinatsystem innteikna. Vi ser på tyngdekraftas kraftmoment (dreiemoment) om origo, i kva for ei retning peikar dette kraftmomentet?

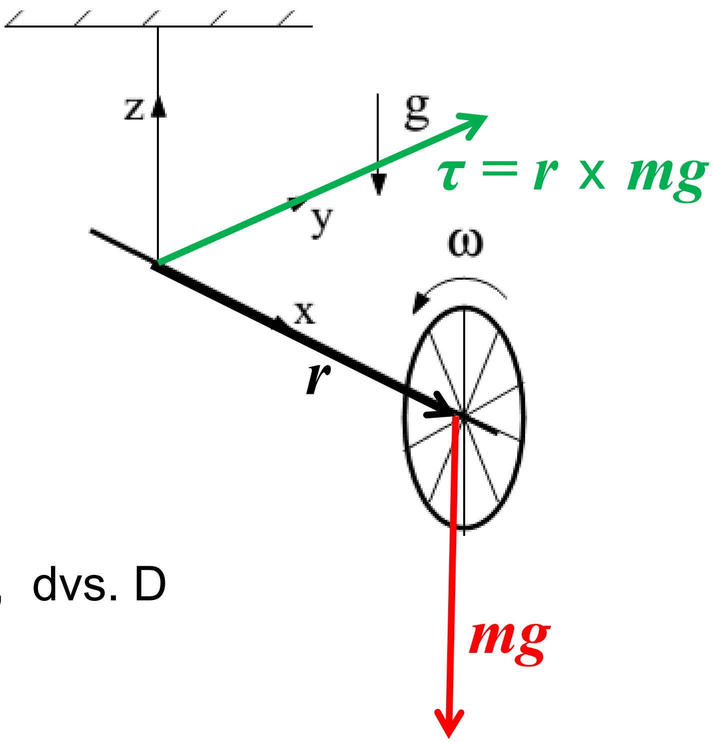
A) $\hat{\mathbf{z}}$ B) $-\hat{\mathbf{z}}$ C) $\hat{\mathbf{y}}$ D) $-\hat{\mathbf{y}}$ E) $-\hat{\mathbf{x}}$



Fra eksamen des 2014:

1-6. Eit sykkelhjul settast i rask rotasjon og hengast opp i ei snor festa til akslingen. Figuren syner hjulet med overdrevet lang aksling og med koordinatsystem innteikna. Vi ser på tyngdekraftas kraftmoment (dreiemoment) om origo, i kva for ei retning peikar dette kraftmomentet?

A) $\hat{\mathbf{z}}$ B) $-\hat{\mathbf{z}}$ C) $\boxed{\hat{\mathbf{y}}}$ D) $-\hat{\mathbf{y}}$ E) $-\hat{\mathbf{x}}$



Svar avgitt:

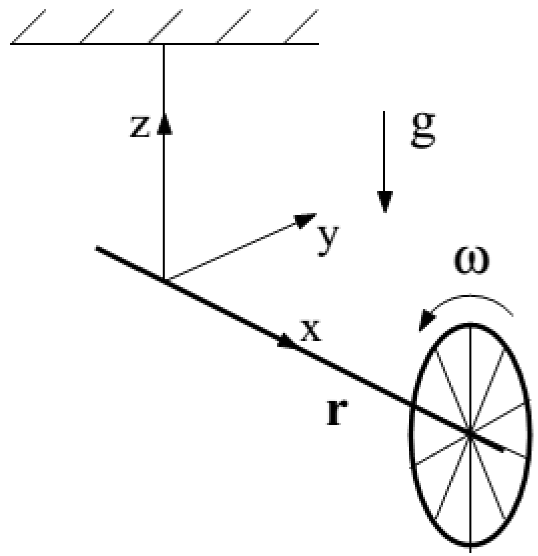
A	9
B	26
C	108
D	28
E	8
blank	21
Tot.	200

Snitt 56%, dvs. D

Fra eksamen des 2014:

<u>1-7.</u> Hjulet og akslingen i figuren vil presesere med rotasjonsvektor $\vec{\Omega}$ i retninga

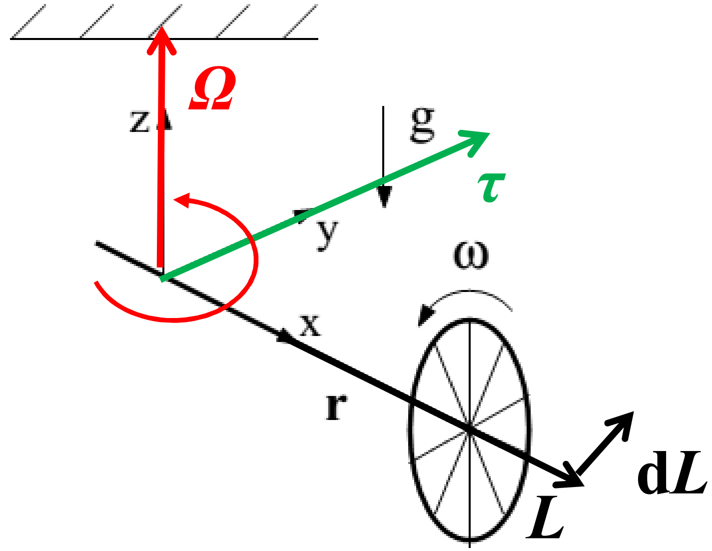
A) $\hat{\mathbf{z}}$ B) $-\hat{\mathbf{z}}$ C) $\hat{\mathbf{y}}$ D) $-\hat{\mathbf{y}}$ E) $-\hat{\mathbf{x}}$



Fra eksamen des 2014:

1-7. Hjulet og akslingen i figuren vil presesere med rotasjonsvektor $\vec{\Omega}$ i retninga

A) $\hat{\mathbf{z}}$ B) $-\hat{\mathbf{z}}$ C) $\hat{\mathbf{y}}$ D) $-\hat{\mathbf{y}}$ E) $-\hat{\mathbf{x}}$



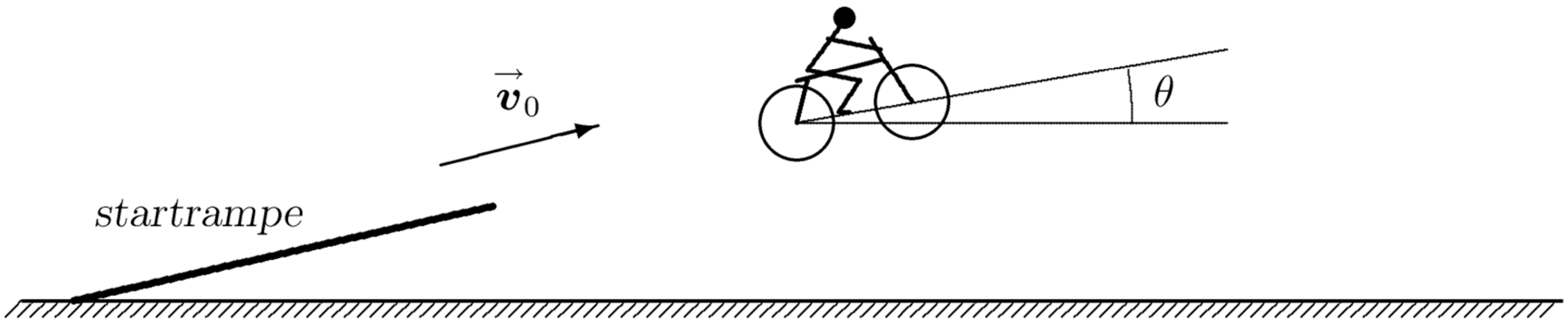
Svar avgitt:

A	43
B	15
C	52
D	26
E	12
blank	52
Tot.	200

Snitt 27%, dvs. F

Fra en eksamensoppgave annet fysikkemne:

e) En sirkusartist på motorsykkel kjører med hastighet v_0=85 km/time opp en startrampe for deretter å foreta et langt hopp. Vinkelen målt fra horisontallinja til ei linje gjennom navene til motorsykkelens to hjul settes lik θ.

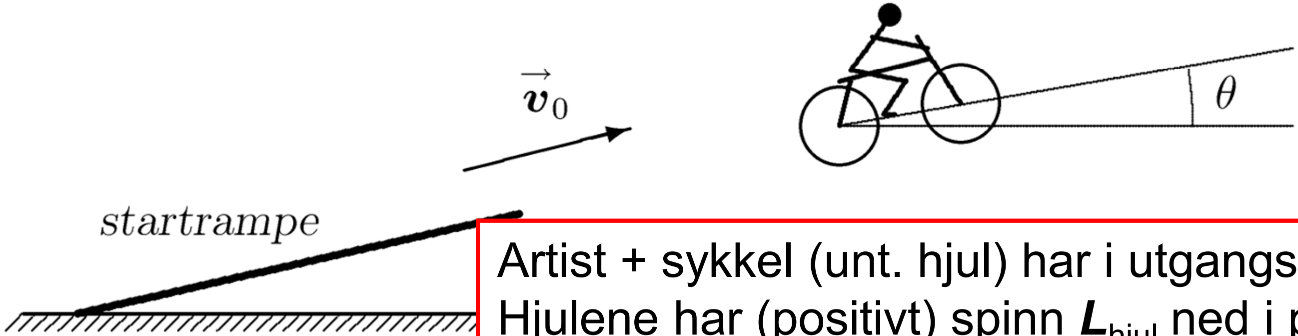


a) Hvordan vil vinkelen θ endre seg hvis motorsyklisten i svevet gir mer gass (øker turtallet til motoren og bakhjul)? Begrunn svaret. Se bort fra luftmotstanden.

b) Hvordan vil vinkelen θ endre seg hvis motorsyklisten i svevet i stedet trykker inn handbremsa på framhjulet? Begrunn svaret. Se bort fra luftmotstanden.

Fra en eksamensoppgave annet fysikkemne:

e) En sirkusartist på motorsykkel kjører med hastighet v_0=85 km/time opp en startrampe for deretter å foreta et langt hopp. Vinkelen målt fra horisontallinja til ei linje gjennom navene til motorsykkelens to hjul settes lik θ.



Artist + sykkel (unt. hjul) har i utgangspunkt spinn $\boldsymbol{L}_{\text{artist}}$ = **0**
Hjulene har (positivt) spinn $\boldsymbol{L}_{\text{hjul}}$ ned i papirplanet.
$\boldsymbol{L}_{\text{tot}} = \boldsymbol{L}_{\text{hjul}} + \boldsymbol{L}_{\text{artist}}$ er bevart.

a) Dersom $\boldsymbol{L}_{\text{hjul}}$ **øker** må $\boldsymbol{L}_{\text{artist}}$ peke opp av planet (steiler)
b) Dersom $\boldsymbol{L}_{\text{hjul}}$ **avtar** må $\boldsymbol{L}_{\text{artist}}$ peke ned i planet (stuper)

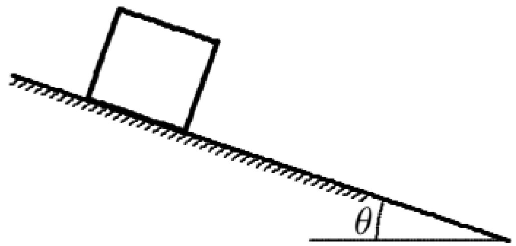
a) Hvordan vil vinkelen θ endre seg hvis motorsyklisten i svevet gir mer gass (øker turtallet til motoren og bakhjul)? Begrunn svaret. Se bort fra luftmotstanden.

b) Hvordan vil vinkelen θ endre seg hvis motorsyklisten i svevet i stedet trykker inn handbremsa på framhjulet? Begrunn svaret. Se bort fra luftmotstanden.

Fra eksamen des 2014:

1-11. Ein massiv kubisk kloss (kvadratisk sidekant) ligg i ro på eit skråplan som har vinkel θ med horisontalplanet. Friksjonskoeffisientane mellom klossen og underlaget er $\mu_\mathrm{k} = 0,45$ og $\mu_\mathrm{s} = 0,65$. Skråplanvinkelen aukast langsomt. Vil klossen først begynne å gli eller vil den først tippe over?

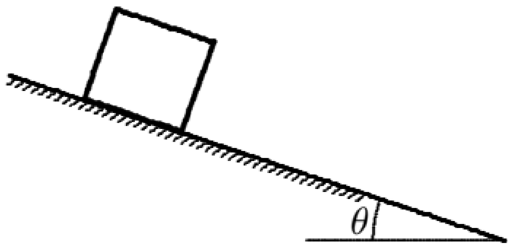
A) Den vil først tippe over.
B) Den vil først begynne å gli.
C) Den vil tippe over samtidig som den begynner å bli.
D) Det er umogleg å gi eit svar utan å vite massen på klossen.
E) Det er umogleg å gi eit svar utan å vite dimensjonen på klossen.



Fra eksamen des 2014:

1-11. Ein massiv kubisk kloss (kvadratisk sidekant) ligg i ro på eit skråplan som har vinkel θ med horisontalplanet. Friksjonskoeffisientane mellom klossen og underlaget er $\mu_k = 0,45$ og $\mu_s = 0,65$. Skråplanvinkelen aukast langsomt. Vil klossen først begynne å gli eller vil den først tippe over?

A) Den vil først tippe over.
B) Den vil først begynne å gli.
C) Den vil tippe over samtidig som den begynner å bli.
D) Det er umogleg å gi eit svar utan å vite massen på klossen.
E) Det er umogleg å gi eit svar utan å vite dimensjonen på klossen.



Tipper ved $\theta = 45^o$
(når kubens tyngdepunkt utenfor høyre nedre hjørne)

Glir idet $mg \sin\theta = F_f = \mu_s mg \cos\theta$,
dvs. $\tan\theta = \mu_s = 0{,}65$ ($\theta = 33^o$)

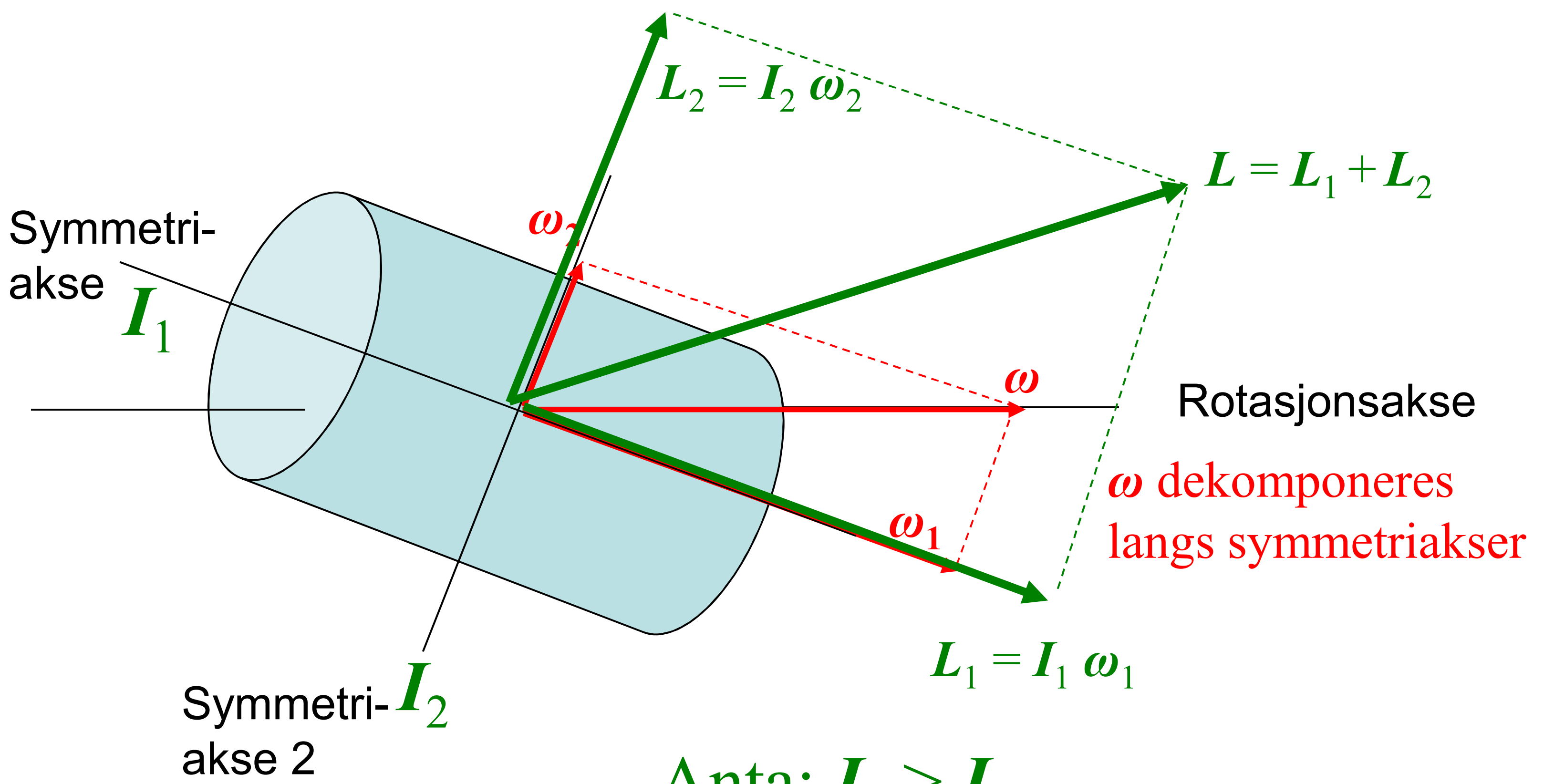
Svar avgitt:

A	16
B	115
C	7
D	21
E	12
blank	29
Tot.	200

Snitt 60%, dvs. D

Rotasjon om akse ikke-parallell med symmetriakse

(Ikke pensum)



Anta: $I_2 > I_1$

Da er **ikke** L parallell med ω

L endrer altså retning under rotasjonen

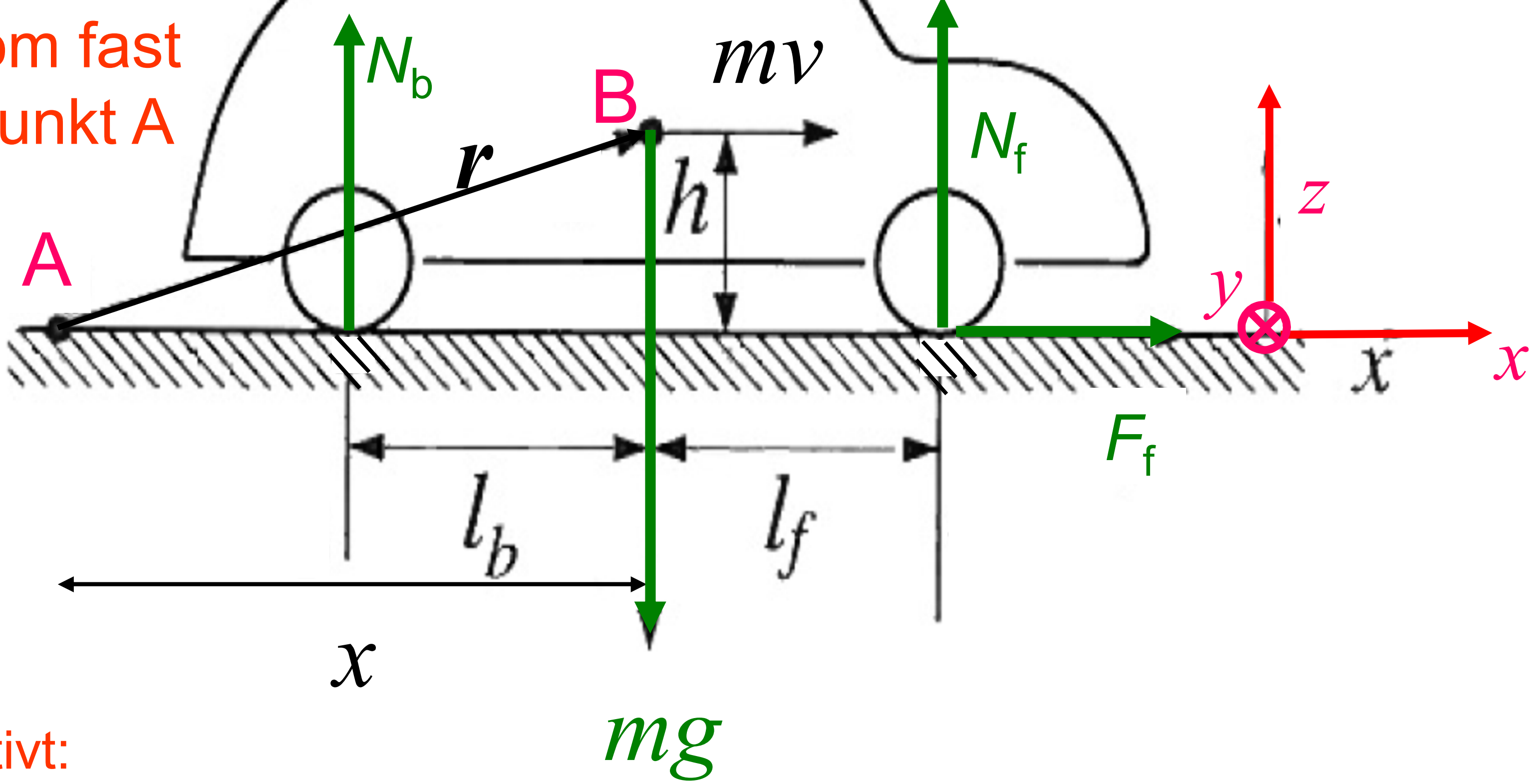
Eks. 8. Spinn for akselelererende/bremsende bil

(H&S kap. 4.7.2 og 5.4.4)

Detaljer på «Forelesningsplan» på web, eksempel*: Bil*

$$N_b\, l_b - N_f\, l_f = h\, m\, a$$

Spinn om fast bakkepunkt A



Alternativt:
Spinn om bilens c.m. B

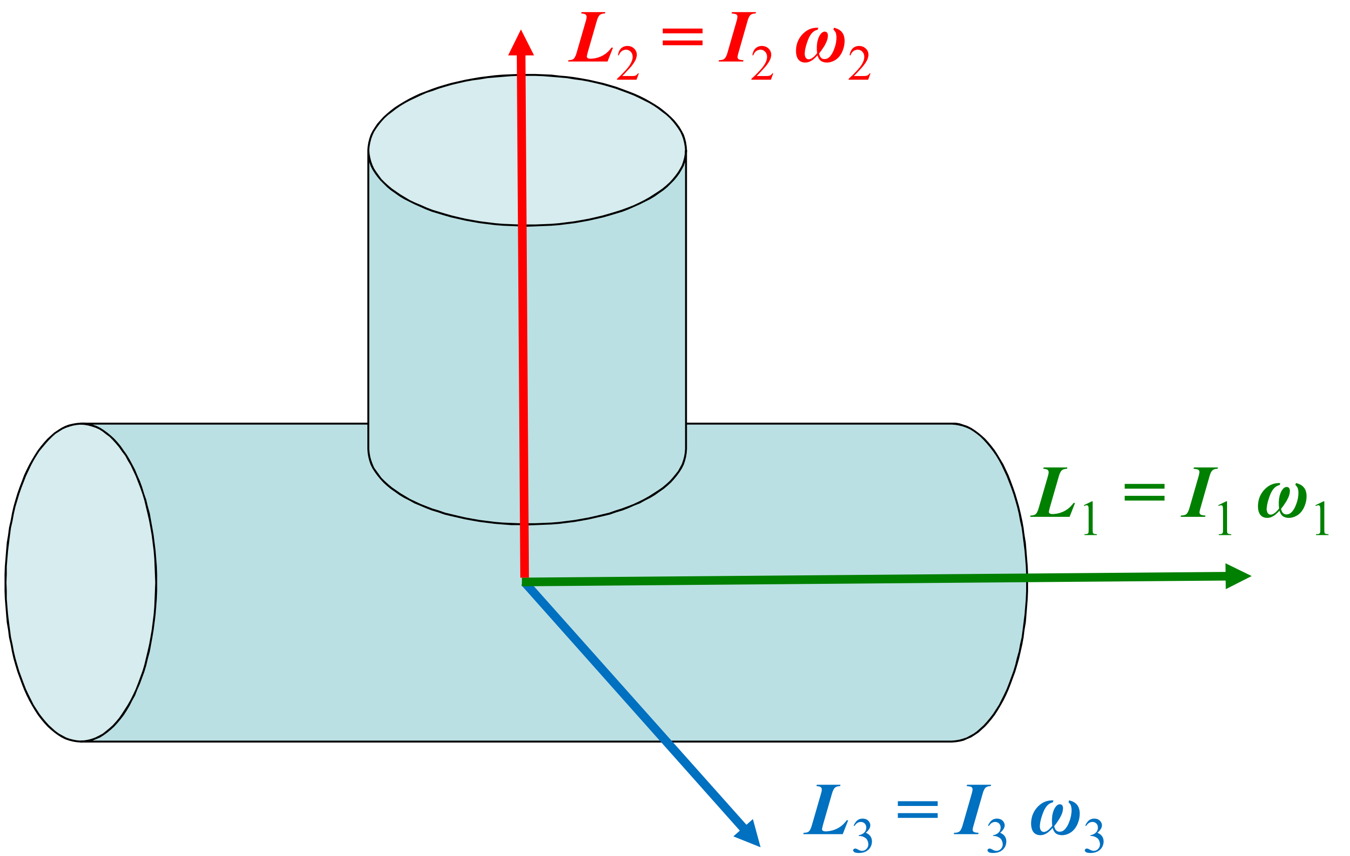
Vist til meg av student i forrige time:

Rotasjon om ikke-fast akse i vektløs tilstand:

Dancing T-handle in zero-g:
https://www.youtube.com/watch?v=1n-HMSCDYtM

Forklaring:
https://www.youtube.com/watch?v=-Si6iRL5Fj8

Legeme med tre ulike treghetsmoment om tre akser normalt på hverandre og $I_1 < I_2 < I_3$



Intermediate axis theorem (tennis racket theorem):
Rotasjon om akse 1 og 3 er stabil, rotasjon om akse 2 er ustabil.

Teori: https://en.wikipedia.org/wiki/Tennis_racket_theorem