TFY4115 Fysikk (MTEL/MTTK/MTNANO)

Eksamen 11. des. 2014. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsoppgaver

Oppgave:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Rett svar:	B	D	E	B	D	C	A	E	D	C	B

Oppgave:	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Rett svar:	A	A	C	D	C	B	E	C	B	B	A

Detaljer om spørsmålene:

1-1. B. Farten skifter retning på toppen slik at A ikke kan være rett. Akselerasjonen er konstant under bevegelsen opp (og ned), slik at D ikke er rett. Akselerasjonen har størst tallverdi når klossen er på vei oppover fordi da virker tyngden og friksjonen i samme retning, altså er B med størst endring i v på opptur riktig.

1-2. D. $F_\mathrm{f} = \mu_\mathrm{k} F_\mathrm{N} = \mu_\mathrm{k}(mg - F\sin\theta)$. Normalkrafta blir altså mindre som følge av at F har komponent oppover. Det gjelder også at $F_\mathrm{f} = F\cos\theta$ når farta er konstant, men dette var ikke et oppgitt alternativ.

1-3. E. Ved fall uten luftmotstand er akselerasjonen konstant og lik g. Med luftmotstand avtar den gradvis til null, men dette tar i prinsipp uendelig lang tid, slik at akselerasjonen avtar asymptotisk mot null. Med bruk av Newton 2: $mg - bv^2 = ma$. Dvs. akselerasjonen avtar når v etterhvert øker og går mot null (lik null og konstant fart når luftmotstanden lik tyngden). Det er kvalitativt samme forløp dersom luftmotstanden prop. med v.

1-4. B. ω og $\alpha = \dot{\omega}$ er lik for alle punkter på plata. $a_\mathrm{c} = \omega^2 r$ og $a_\theta = \alpha r$ øker begge med r=avstand fra sentrum.

1-5. D. Kollisjonen er fullstendig uelastisk, så (mekanisk) energi E for systemet kan ikke være bevart. Akslingen som står fast i bordet virker på systemet med en (ytre) kraft under støtet, dermed kan heller ikke systemets bevegelsesmengde p være bevart. Men denne krafta fra akslingen representerer ikke noe kraftmoment mhp. en aksen, slik at spinnet L er bevart.

1-6. C. $\vec{\tau} = \vec{r} \times m\vec{g} = rmg\,\hat{\mathbf{x}} \times (-\hat{\mathbf{z}}) = rmg\,\hat{\mathbf{y}}$.

1-7. A. Ifølge spinnsatsen $\vec{\tau} \cdot \mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{L}$ vil endring i spinnet $\mathrm{d}\vec{L}$ ha samme retning som kraftmomentet $\vec{\tau}$. Kraftmomentet fra tyngdens er i retning $\hat{\mathbf{y}}$: $\vec{\tau} = \vec{r} \times m\vec{g} = rmg\,\hat{\mathbf{x}} \times (-\hat{\mathbf{z}}) = rmg\,\hat{\mathbf{y}}$. Med hjulrotasjonsretning ω som angitt har $\vec{L}$ retning $\hat{\mathbf{x}}$ og med endring $\mathrm{d}\vec{L}$ i retning $\hat{\mathbf{y}}$ vil presesjonen gå mot klokka sett ovenfra, dvs. $\vec{\Omega} \propto \hat{\mathbf{z}}$.

1-8. E. Kinetisk energi alltid positiv, derfor kan A, C og D forkastes. Hastigheten endres harmonisk, derfor må E_kin også endres harmonisk, 5 er rett.

1-9. D. Fra figuren ser vi f.eks. at $x(0) = 1$ og $x(5T) = 0,5$, der $T = 2\pi/\omega$ er svingningens periode. Dermed:

$$e^{-\gamma\cdot 5T} = e^{-\gamma\cdot 5\cdot 2\pi/\omega} = 0,5 \qquad \Rightarrow \quad 10\pi\,\frac{\gamma}{\omega} = \ln 2 \qquad \Rightarrow \quad \frac{\gamma}{\omega} = \frac{\ln 2}{10\pi} = 0,0221.$$

1-10. C. Ved maksimum v er $\dot{v} = 0$, som skjer når $a = \dot{v} = 0$.

1-11. B. Klossen vil starte å gli når $mg\sin\theta > F_{\mathrm{f,max}} = \mu_\mathrm{s} F_\mathrm{N} = 0,65 \cdot mg\cos\theta$, altså ved $\theta = \arctan 0,65 = 33°$. Grensen for å tippe over er når massesenteret ligger rett over nedre kontaktpunkt (momentbalanse). For en kube (kvadratisk sidekant) skjer dette ved $\theta = 45°$.

1-12. A. Med $a = 0,40$ m = sidekant, F_x den horisontale krafta og G tyngden, gir rotasjonslikevekt om nedre feste: $G \cdot a/2 = F_x \cdot a$ som gir $F_x = G/2 = \frac{1}{2} \cdot 4,0\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 20\,\mathrm{N}$.

1-13. A. 1. Hovedsetning: $Q = \Delta U + W$. Temp. øker likt $\Rightarrow \Delta U > 0$ og lik i begge. Konstant volum: $W = 0$. Volumet må øke når T skal øke med konstant trykk, dvs. $W > 0$, dermed Q_p størst.

1-14. C. Fra 2. hovedsetning. Arbeid kan 100% omformes til varme(D), ikke motsatt(C). Varme kan overføres fra kaldt til varmt legeme ved input av arbeid, en kjølemaskin(B). 2.H gjelder alle prosesser, også irreversible(E).

1-15. D. Koeksistens mellom fast stoff og væske ved 1, dvs. smelting. Koeksistens mellom gass og væske ved 2, dvs. fordampning. Koeksistens mellom fast stoff og gass ved 3, dvs. sublimasjon.

1-16. C. En isoterm fra tilstand a er brattere enn isobaren ab men slakere enn adiabaten ac. Dermed: $T_\mathrm{b} > T_\mathrm{a} > T_\mathrm{c}$.

1-17. B. For ideell gass er T proporsjonal med $\langle E_\mathrm{k} \rangle$, uavhengig av typen gass. (For toatomig gass blir noe av kin. energi rotasjonsenergi og translasjonsfarten blir mindre. Ingen vigrasjonsenergi ved romtemp.)

1-18. E. $\eta = W/Q_{\text{inn}} = (Q_{\text{inn}} - Q_{\text{ut}})/Q_{\text{inn}} = (12000 - 9000)/12000 = 1/4.$

1-19. C. Per frihetsgrad er $C_V = \frac{1}{2}R$. Tre translasjonsfrihetsgrader (x, y, z) for alle gassmolekyler. Ved romtemperatur vil toatomige gassmolekyler rotere med to frihetsgrader, dermed R større. Vibrasjon først ved temperatur langt over romtemperatur.

1-20. B. Ved adiabatisk kompresjon er pV^γ konstant slik at $p_1 = p_0\,(V_0/V_1)^\gamma = p_0 \cdot 3^\gamma$. Gassene er ideelle og ved 0 °C har enatomige He $\gamma = C_p/C_V = 5/3$ mens toatomige O_2 har $\gamma = C_p/C_V = 7/5 < 5/3$. Størst γ gir størst trykk, altså He størst trykk. Fra ideell gasslov $pV = nRT$ vil ved sluttilstanden gassen med høyest p også ha høyest T når sluttvolumene er de samme.

1-21. B. Utstråling: $\dot{Q} = Aj = Ae\sigma T^4 = 1,70\,\text{m}^2 \cdot 0,90 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}\,\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4} \cdot (300\,\text{K})^4 = 702,68\,\text{W}$. Innstråling: $\dot{Q} = 1,70\,\text{m}^2 \cdot 0,90 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}\,\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4} \cdot (290\,\text{K})^4 = 613,57\,\text{W}$. Netto: 89,11 W.

1-22. A. Seriekopling av varmemotstander er som seriekopling av elektriske motstander, $R = \sum R_i = R_1 + R_2$. Utregnet: Ved stasjonære forhold er varmestrømmen lik i begge stavene, $\dot{Q} = \dot{Q}_1 = \dot{Q}_2$, der $\dot{Q}_i = \frac{\kappa_i A_i}{\ell_i}\Delta T_i = \frac{1}{R_i}\Delta T_i$ (formelsamling), altså $R_i\dot{Q} = \Delta T_i$. Sum av temperaturendring: $T_{\text{H}} - T_{\text{L}} = \Delta T_1 + \Delta T_2$ gir da $R\dot{Q} = R_1\dot{Q} + R_1\dot{Q}$, altså $R = R_1 + R_2$.

Oppgave 2. Mekanikk

a. Fra formelark har kula treghetsmoment $I = \frac{2}{5}mr^2$, som gir

$$E_{\text{k}} = E_{\text{k,trans}} + E_{\text{k,rot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \underline{\frac{7}{10}mv^2}\,.$$

b. Vi velger høyde $h = 0$ på underlaget. Ved A har kulas tyngdepunkt en høyde $h = r$, ved C er høyden $h = R$. Bevaring av energi gir:

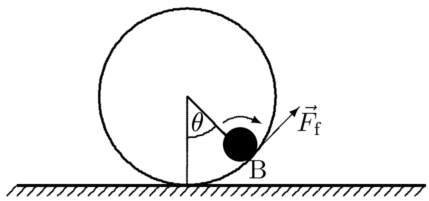
$$mgr + \frac{7}{10}mv_{\text{A}}^2 = mgR + \frac{7}{10}mv_{\text{C}}^2 \tag{1}$$

$$\Rightarrow \quad v_{\text{C}}^2 = v_{\text{A}}^2 - gR'\cdot\frac{10}{7} = 9,0\,\text{m}^2/\text{s}^2 - 9,81\,\text{m/s}^2\cdot 0,200\,\text{m}\cdot\frac{10}{7} = 6,197\,\text{m}^2/\text{s}^2, \tag{2}$$

der vi har brukt $R' = R - r = 0,200$ m.

$$v_{\text{C}} = \sqrt{6,197}\,\text{m/s} = 2,489\,\text{m/s} = \underline{2,49\,\text{m/s}}\,.$$

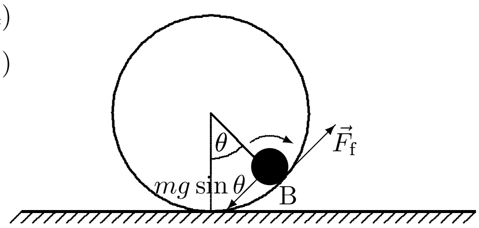
c. Vinkelhastigheten for kula avtar, og eneste krafta som gir vinkelakselerasjon er friksjonskrafta F_{f}. Derfor må F_{f} virke motsatt rotasjonsretningen, dvs. **oppover**, og parallelt med underlaget, som vist i figuren.



Med positiv omdreining i kulas rulleretning (med klokka) gir spinnsatsen

$$\sum \tau = I\alpha \quad\Rightarrow\quad -F_{\text{f}}\,r = I\alpha \qquad \left(\Rightarrow\ F_{\text{f}} = -\frac{2}{5}mr\alpha\right). \tag{3}$$

d.



N2 med pos oppover: $\quad ma = F_{\text{f}} - mg\sin\theta \qquad (4)$

N2-rot (3) med $\alpha = a/r$: $\quad I\alpha = I\dfrac{a}{r} = -F_{\text{f}}r \qquad (5)$

Likn. (3) eller (5) gir

$$F_{\text{f}} = -I\frac{a}{r^2} = -\frac{2}{5}mr^2\cdot\frac{a}{r^2} = -\frac{2}{5}ma,$$

som innsatt i (4) gir

$$ma(1 + \frac{2}{5}) = -mg\sin\theta \quad\Rightarrow\quad \underline{a = -\frac{5}{7}g\sin\theta.} \tag{6}$$

Mer utradisjonelt, kan også vises fra energibalanse:

$$E_{\text{tot}} = \frac{7}{10}mv^2 + mgh = \frac{7}{10}mv^2 + mgR'\,(1-\cos\theta) = \text{konst.}$$

Derivasjon $\mathrm{d}E_{\text{tot}}/\mathrm{d}t$ gir $\quad \dfrac{7}{10}m\,2v\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + mgR'\sin\theta\,\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a = -\dfrac{5}{7}g\sin\theta.$

Her har vi brukt $R'\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = v$ slik at v forkortes bort.

e. I stilling C er $\theta = 90°$, dvs. $a = -\frac{5}{7}g\sin\theta = -\frac{5}{7}g$. Da er vinkelakselerasjonen $\alpha = \dfrac{a}{r} = -\dfrac{5}{7}\dfrac{g}{r}$. Det er kun F_f som gir α, og skal kula rulle (uten å slure) er nødvendig friksjonskraft gitt ved likn. (5):

$$F_\mathrm{f} = -I\frac{\alpha}{r} = -\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\cdot\left(-\frac{5}{7}\frac{g}{r^2}\right) = \underline{\frac{2}{7}mg} = \frac{2}{7}\cdot 0,150\,\mathrm{kg}\cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2} = \underline{0,420\,\mathrm{N}.}$$

Kan også finnes fra likn. (4): $F_\mathrm{f} = ma + mg\sin\theta \overset{(6)}{=} -\frac{5}{7}mg\sin\theta + mg\sin\theta = \frac{2}{7}mg\sin\theta$.

f. Maksimal friksjonskraft er

$$F_{\mathrm{f,max}} = \mu_s \cdot F_N,$$

så vi må finne hva normalkrafta er mot underlaget ved C. Newton 2 horisontalt:

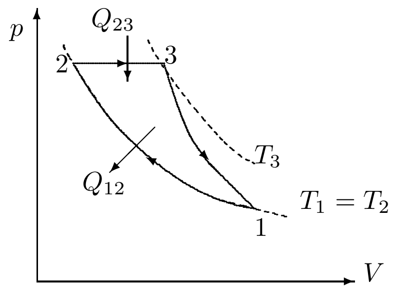
$$\sum F = ma_c \quad\Rightarrow\quad F_N = m\frac{v_\mathrm{C}^2}{R'} = 0,150\,\mathrm{kg}\cdot\frac{6,197\,\mathrm{m^2/s^2}}{0,200\,\mathrm{m}} = 4,65\,\mathrm{N}.$$

Dermed er

$$F_{\mathrm{f,max}} = \mu_s \cdot F_N = 0,200\cdot 4,65\,\mathrm{N} = 0,930\,\mathrm{N}\,.$$

Nødvendig friksjonskraft $F_\mathrm{f} = 0,42\,\mathrm{N}$ er godt under det maksimale: kula ruller fortsatt trygt uten fare for å slure. (Sagt på annen måte: Nødvendig friksjonskoeffisient er $F_\mathrm{f}/F_\mathrm{N} = 0,42/4,65 = 0,090$, og den oppgitte er større.)

Oppgave 3. Kretsprosess.



a. Prosessene skissert i figuren, ikke perfekt krumning på kurvene.
1-2. Isoterm med helning $p \propto V^{-1}$.
2-3. Isobar ekspansjon. Konstant p, tilførsel av varme til høyere volum V_3 og høyere temperatur T_3.
3-1. Adiabat med helning $p \propto V^{-\gamma}$, brattere enn isoterm ($\gamma = 7/5 = 1,4$ for toatomig gass.
Varme $Q_{23} > 0$ inn i gassen ved 2-3, varme $Q_{12} > 0$ trekkes ut av gassen ved 1-2, $Q_{31} = 0$ ved adiabaten.
To isotermer: $T_1 = T_2$ og T_3 er inntegnet.

b. Idealgass, isoterm prosess: $p_1V_1 = nRT_1 = p_2V_2$.

$\underline{\Delta U = 0\ \mathrm{J}}$, fordi U kun avhengig T for ideell gass, og her er T konstant,

$\Delta S = \int_1^2 đQ_\mathrm{rev}/T_1$. 1.hovedsetning med $\Delta U = 0$ gir

$đQ_\mathrm{rev} = đW = p\mathrm{d}V = (nRT_1/V)\cdot\mathrm{d}V$, slik at: $\underline{\Delta S} = \frac{1}{T_1}\cdot nRT_1\int_1^2 \mathrm{d}V/V = \underline{nR\ln V_2/V_1}$.

Eller direkte fra formelark: $\Delta S_{12} = nC_V\ln T_2/T_1 + nR\ln V_2/V_1 = 0 + nR\ln V_2/V_1$.

c. Beregning av V_3 må baseres på skjæringen mellom isobaren 2-3 (med $p_2 = p_3$) og adiabaten 3-1 (med pV^γ =konstant). Fra isotermen i **b.** er $p_2/p_1 = V_1/V_2$, og dette gir

$$p_2V_3^\gamma = p_1V_1^\gamma \quad\Rightarrow\quad V_3 = V_1\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\gamma} = \underline{V_1\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1/\gamma}}.$$

Tilhørende T_3 bestemt fra ideell gasslov $nRT_3 = p_2V_3$, der vi igjen utnytter $p_1V_1 = nRT_1 = p_2V_2$ fra isotermen 1-2.

$$T_3 = \frac{p_2V_3}{nR} = \frac{p_2V_2}{nR}\,\frac{V_3}{V_2} = T_1\,\frac{V_1}{V_2}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1/\gamma} = \underline{T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-1/\gamma}}$$

For toatomig gass er $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{7/2}{5/2} = \frac{7}{5}$ og $1-\frac{1}{\gamma} = \frac{2}{7}$, men verdi ikke nødvendig å beregne eller å sette inn.

Kunne alternativt finne T_3 fra adiabatlikningen $T_3V_3^{\gamma-1} = T_1V_1^{\gamma-1}$, tar med som kontroll:

$$T_3 = T_1\left[\frac{V_1}{V_3}\right]^{\gamma-1} = T_1\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1/\gamma}\right]^{\gamma-1} = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} = \underline{T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-1/\gamma}}$$

der vi har brukt uttrykket for V_3/V_1 ovenfor.

d. 1-2 er en isoterm prosess der vi f.eks. kan utnytte uttrykket for ΔS_{12} fra **a.** Dette gir

$$Q_{12} = T_1\Delta S_{12} = nRT_1\ln V_2/V_1.$$

For den isobare prosessen har vi ganske enkelt

$$Q_{23} = n\, C_p \cdot (T_3 - T_1),$$

slik at netto varme er

$$Q = Q_{12} + Q_{23} = \underline{nRT_1 \ln V_2/V_1 + n\, C_p \cdot (T_3 - T_1)}.$$

Dette er vel enkleste formen å uttrykke svaret med oppgitte størrelser inklusiv T_3.

For isotermen kunne vi alternativt brukt $\Delta U = 0 \Rightarrow Q_{12} = W_{12} = \int_1^2 p\mathrm{d}V = nRT_1 \int_1^2 \frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT_1 \ln V_2/V_1$.

e. For adiabaten 3-1 er det enklere å regne ut ΔU og så bruke 1. lov med $Q = 0$, som gir $W = -\Delta U$. For ideell gass er indre energi kun avhengig av temperaturen og lik $U(T) = nC_V T$, slik at vi får

$$W_{31} = -(U_1 - U_3) = -nC_V(T_1 - T_3) = \underline{nC_V(T_3 - T_1)}.$$

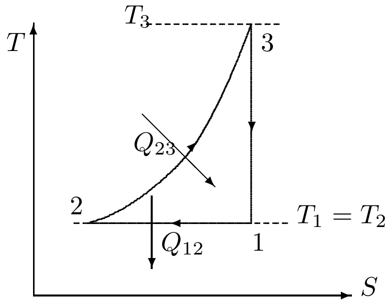
Sjekk gjerne at $W_{31} > 0$, som den skal være for en ekspansjon.

Med mer strev kan arbeidet beregnes ved vanlig integrasjon av $p\mathrm{d}V$. For adiabaten 3-1 er $pV^\gamma = p_1 V_1^\gamma = p_3 V_3^\gamma$, slik at

$$\begin{aligned}
W_{31} &= \int_3^1 p\mathrm{d}V = p_1 V_1^\gamma \cdot \int_3^1 V^{-\gamma}\mathrm{d}V = p_1 V_1^\gamma \cdot \frac{1}{1-\gamma}\left[V_1^{1-\gamma} - V_3^{1-\gamma}\right] \\
&= \frac{1}{1-\gamma}\left[p_1 V_1^\gamma \cdot V_1^{1-\gamma} - p_3 V_3^\gamma \cdot V_3^{1-\gamma}\right] = \frac{1}{1-\gamma}\left[p_1 V_1 - p_3 V_3\right] = \frac{1}{\gamma - 1}\left[nRT_3 - nRT_1\right] \\
&= \underline{\frac{nR}{\gamma - 1}\left[T_3 - T_1\right] \ = \ nC_V\left[T_3 - T_1\right]}.
\end{aligned}$$

I siste overgang har vi brukt $\frac{R}{\gamma-1} = \frac{RC_V}{C_p - C_V} = \frac{RC_V}{R} = C_V$ som framkommer fra $\gamma = C_p/C_V$ og $C_p - C_V = R$.

f. I TS-diagram er isoterm en horisontal linje og adiabat (isentrop) er en vertikal linje. Isobaren forbinder 2 og 3 og vil ha krumning som vist. Funksjonsforløpet for isobaren kan vi kun finne ut ved beregning, som spurt etter:



For prosess 2-3 gjelder: $\text{đ}Q = T\mathrm{d}S$ og $\text{đ}Q = n\, C_p \mathrm{d}T$ og altså $\mathrm{d}S = nC_p \frac{\mathrm{d}T}{T}$. Gir integrert:

$$\begin{aligned}
\int_{S_2}^{S} \mathrm{d}S = n\, C_p \int_{T_1}^{T} \frac{\mathrm{d}T}{T} \quad &\Rightarrow \quad S - S_2 = n\, C_p \ln \frac{T}{T_1} \\
\Rightarrow \quad &\underline{T(S) = T_1 \cdot \exp\left\{\frac{S - S_2}{n\, C_p}\right\}}. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Alternativt fra formelark for ΔS_{12} som gir $\Delta S_{23} = nC_V \ln T_3/T_2 + nR \ln V_3/V_2$. For isobaren 23 er $V/V_2 = T/T_2$, slik at $S - S_2 = S(T) - S(T_2) = n(C_V + R) \ln T/T_2 = nC_p \ln T/T_2$. Med $T_2 = T_1$ får vi også her $T(S) = T_1 \cdot \exp\left\{\frac{S - S_2}{n\, C_p}\right\}$.

Kommentar: Krumningen for isobaren kan kontrolleres uten utregning av $T(S)$ med $\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p = 1/\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{T}{nC_p}$ som vi får fra $S(T, p) = S_0 + nC_p \ln \frac{T}{T_0} - nR \ln \frac{p}{p_0}$ for ideell gass. Stigningstallet $\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p$ er altså positivt og øker med temperaturen.

Vi kan evt. kontrollere funnet uttrykk for T_3 i **c.** *mot likn. (7):*
Nå er $S_3 = S_1$ slik at likn. (7) gir $T_3 = T(S_1) = T_1 \cdot \exp\left\{\frac{S_1 - S_2}{n\, C_p}\right\}$. Fra **a.** har vi $S_1 - S_2 = -\Delta S = nR \ln V_1/V_2$. Bruk av $\frac{R}{C_p} = \frac{C_p - C_V}{C_p} = 1 - \frac{1}{\gamma}$ gir samme svaret for T_3 som i **c.** :

$$T_3 = T_1 \cdot \exp\left\{\frac{nR \ln \frac{V_1}{V_2}}{n\, C_p}\right\} = T_1 \cdot \exp\left\{(1 - \frac{1}{\gamma}) \ln \frac{V_1}{V_2}\right\} = T_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1 - \frac{1}{\gamma}}.$$

A.Mi. 12. des. 2014.