TFY4115 Fysikk (MTELSYS/MTTK/MTNANO)
"Matteøving" - NANO

Utfyllende til forelesninger "nyttig matematikk" for MTNANO. Ingen veiledning og ingen innlevering.

Oppgave 1.

Regn ut de fire mulige andrederiverte av funksjonen $f(x, y) = \sin(x + y^2)$. Sjekk at de to "kryssleddene" er like.

Oppgave 2.

Anta at terrenget omkring en fjelltopp kan beskrives med høydefunksjonen

$$h(x, y) = h_0 \frac{e^{-x^2/a^2}}{1 + y^2/a^2},$$

der h_0 er en konstant og lik høyden på fjelltoppen, mens a er en annen konstant som angir en "karakteristisk lengde" for hvor raskt høyden endrer seg i dette terrenget.

a Hvor er fjelltoppen?

b I hvilken retning er det brattest hvis du befinner deg i posisjonen $(x, y) = (a, a)$? Angi retningen relativt til positiv x-retning, som vi velger mot øst.

c Regn ut de andrederiverte og *vis* at fjelltoppen ligger i $(0, 0)$. Med andre ord, vis at $(0, 0)$ er et topp-punkt.

Oppgave 3.

En kloss med masse m glir nedover et skråplan som danner vinkelen θ med horisontalplanet. Skråplanet er innsatt med en olje, og vi antar at friksjonskraften mellom klossen og skråplanet er proporsjonal med klossens hastighet, dvs $-bv$, der b er en konstant (med enheten Ns/m). Anta videre at klossen starter med null hastighet i origo, dvs $v(0) = 0$ og $x(0) = 0$. Her angir $x(t)$ posisjonen til klossen, målt langs skråplanet.

Bestem klossens hastighet $v(t)$ og dens posisjon $x(t)$, uttrykt ved gitte størrelser, dvs ved m, g, θ og b.

Tips: Ta utgangspunkt i Newtons andre lov, som her blir

$$ma = -bv + mg \sin\theta,$$

samt at $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$.

Oppgave 4.

Bestem arealet mellom kurvene $x = 0$, $x = \pi/4$, $y = \sin x$ og $y = \cos x$.

Oppgave 5.

Bestem arealet "mellom" de to parablene $x^2 - 4$ og $-x^2 + 4$. Hva blir volumet av legemet vi får ved å rotere dette arealet omkring y-aksen?

Oppgave 6.

Finn Taylorrekken til disse funksjonene (i nærheten av $x = 0$):

a) $\sin x$

b) $\cos x$

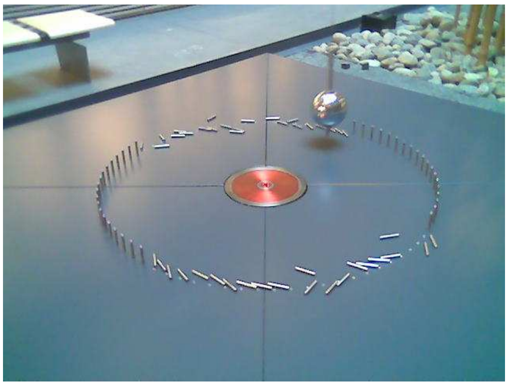
c) $(1 + x)^\alpha$

d) $\ln(1 + x)$

Tips: Bruk formelen for Taylorrekken til å bestemme de 2-3 første leddene i rekken. Prøv deretter å *se* hvordan de påfølgende leddene blir.

Oppgave 7.

I Realfagbygget henger en ca 25 m lang utgave av *Foucaults pendel*. Den svinger fram og tilbake med en periode $T_0 = 2\pi/\Omega_0$, der vinkelfrekvensen $\Omega_0 = \sqrt{g/L}$ er bestemt ved tyngdens akselerasjon $g = 9,81$ m/s^2 og pendelens lengde $L = 25,0$ m. Jordklodens rotasjon omkring sin egen akse, med periode $T = 2\pi/\omega = 24$ timer, resulterer i at pendelens svingeplan roterer langsomt, og med klokka her på den nordlige halvkule. En hel omdreining av svingeplanet tar tiden $T_\mathrm{d} = T/\sin\beta$, der vinkelen β tilsvarer breddegraden, ca. 63,5° her i Trondheim. For å velte alle de små metallpinnene som står oppstilt i en sirkel nede i U3, må svingeplanet rotere en halv omdreining. Dette tar tiden $T_\mathrm{d}/2 = \sin 63,5° \cdot T/2 \simeq 13,4$ timer. Den langsomme dreiningen av pendelens svingeplan har dermed vinkelfrekvensen $\varepsilon = 2\pi/T_\mathrm{d}$.



Oppgaven her tar utgangspunkt i den matematiske analysen av Foucault-pendelens bevegelse. I analysen kommer man fram til at pendelens egenfrekvens Ω_0 forstyrres litt av svingeplanets rotasjon ϵ, ved at

$$\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon.$$

Oppfatt Ω som en funksjon av ε, mens Ω_0 betraktes som en konstant. Bestem en polynomtilnærmelse til funksjonen $\Omega(\varepsilon)$ til 2. orden i den lille dimensjonsløse størrelsen ε/Ω_0.

Med de oppgitt tallstørrelser, sjekk om antakelsen $\varepsilon/\Omega_0 \ll 1$ er oppfylt.

Oppgave 8.

For alle systemer som svinger harmonisk (SHM) er potensiell energi proporsjonal med kvadratet av utsvinget fra likevekt, f.eks. for en masse-fjær-pendel er $E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kx^2$.

For en matematisk tyngdependel vil potensiell energi utgjøres av tyngdekrafta på kula, slik at $E_\mathrm{p} = mgh$, der h er kulas høyde over laveste (likevekts)punkt.

Vis at for denne pendelen vil $E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}mgL\theta^2$ ved små utslag θ, altså proporsjonal med kvadratet av utsvinget.