

Løsningsforslag for "Matteøving" - NANO

Oppgave 1.

Vi skal regne ut de fire andrederiverte av funksjonen $f(x, y) = \sin(x + y^2)$ og sjekke at de to "kryssleddene" er like:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos(x + y^2) & \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \cos(x + y^2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\sin(x + y^2) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2 \cos(x + y^2) - 4y^2 \sin(x + y^2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} (\cos(x + y^2)) = -2y \sin(x + y^2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} (2y \cos(x + y^2)) = -2y \sin(x + y^2). \end{aligned}$$

Vi ser at rekkefølgen ikke spiller noen rolle, dvs vi kan derivere først mhp y og deretter mhp x , eller omvendt, svaret blir det samme.

Oppgave 2.

Vi har et terreng omkring en fjelltopp som kan beskrives med høydefunksjonen

$$h(x, y) = h_0 \frac{e^{-x^2/a^2}}{1 + y^2/a^2}$$

der h_0 er en konstant og lik høyden på fjelltoppen, mens a også er en konstant og angir en "karakteristisk lengde" for hvor raskt høyden endrer seg i dette terrenget.

a Vi ser vel uten videre at maksimal høyde er i origo, $h(0, 0) = h_0$.

b Vi skal finne ut i hvilken retning terrenget er brattest i posisjonen (a, a) . Da må vi regne ut gradienten til h i (a, a) siden gradienten nettopp peker i den retningen h øker raskest. Vi trenger da de partiellderiverte av h mhp x og y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \left(-\frac{2x}{a^2}\right) h_0 \frac{e^{-x^2/a^2}}{1 + y^2/a^2} \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \left(-\frac{2y}{a^2}\right) h_0 \frac{e^{-x^2/a^2}}{(1 + y^2/a^2)^2} \end{aligned}$$

Vi setter inn $(x, y) = (a, a)$ og finner

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} h(a, a) &= \hat{x} \frac{\partial h}{\partial x}(a, a) + \hat{y} \frac{\partial h}{\partial y}(a, a) \\ &= \left(-\frac{2}{a}\right) h_0 \frac{e^{-1}}{2} \hat{x} + \left(-\frac{2}{a}\right) h_0 \frac{e^{-1}}{4} \hat{y} \\ &= -\frac{h_0}{2ea} (2\hat{x} + \hat{y}) \end{aligned}$$

Det betyr at i posisjonen (a, a) peker $-\vec{\nabla} h$ i en retning $[2, 1]$ gitt ved vinkelen

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \arctan \frac{1}{2} \simeq 27^\circ$$

i forhold til x -aksen (som er f.eks. østover). Terrenget *avtar* raskest i denne retningen og *stiger* raskest i den motsatte retningen.

c Vi skal vil slutt påvise at origo virkelig er en fjelltopp. Da må vi ha $\vec{\nabla} h = 0$ i origo, samt at de andrederiverte må være negative.

La oss ikke skrive alt dette ut i detalj, men derimot se litt nærmere på det vi har. Vi ser at x -komponenten av $\vec{\nabla} h$ er proporsjonal med x , og dermed lik null i $x = 0$. Tilsvarende er y -komponenten av $\vec{\nabla} h$ proporsjonal med y , og dermed lik null i $y = 0$. Altså er origo et stasjonært punkt. Videre ser vi at de andrederiverte mhp x og y , dvs det vi kalte "kryssleddene", begge vil bli proporsjonale med faktoren xy , slik at disse er lik null i origo.

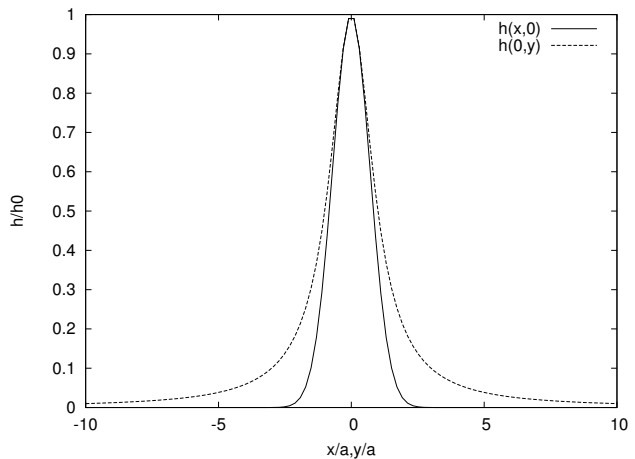
Vi står igjen med $\partial^2 h / \partial x^2$ og $\partial^2 h / \partial y^2$:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \left(-\frac{2}{a^2}\right) h + x^2 \cdot (\dots) \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \left(-\frac{2}{a^2}\right) \frac{h}{(1 + y^2/a^2)} + y^2 \cdot (\dots)$$

Følgelig har vi negativ krumning i origo, og det er et maksimumspunkt.

Figuren viser to "snitt" gjennom fjelltoppen, hhv xh -planet (heltrukken linje) og yh -planet (stiplet linje). Legg merke til at eksponentialfunksjonen går raskest mot null.



Oppgave 3.

Newtons 2. lov gir diffilgningen som skal løses:

$$ma = m \frac{dv}{dt} = -bv + mg \sin \theta = -b \left(v - \frac{mg \sin \theta}{b} \right)$$

Vi ganger med $dt/m(v - mg \sin \theta/b)$ på begge sider:

$$\frac{dv}{v - mg \sin \theta/b} = -\frac{b}{m} dt$$

Integrasjon fra $t = 0$ til t gir

$$\ln [(v(t) - mg \sin \theta/b) - \ln [v(0) - mg \sin \theta/b)] = -\frac{bt}{m}$$

Eksponentiering på begge sider gir så, med $v(0) = 0$,

$$\frac{v(t) - mg \sin \theta/b}{-mg \sin \theta/b} = e^{-t/\tau}$$

der vi har innført "tidskonstanten" $\tau \equiv m/b$. Ordner vi litt finner vi endelig

$$v(t) = \tau g \sin \theta \left(1 - e^{-t/\tau} \right).$$

Merk at vi oppnår en maksimal hastighet etter "lang tid", $t \gg \tau$. Da er friksjonskraften bv og tyngdekraftens komponent langs skråplanet $mg \sin \theta$ like store (men motsatt rettet) slik at total kraft er null:

$$v_{\max} = \tau g \sin \theta = \frac{mg \sin \theta}{b}.$$

Posisjonen (målt langs skråplanet) $x(t)$ finner vi ved å integrere hastigheten (med $x(0) = 0$):

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t v(t) dt \\ &= \tau g t \sin \theta - \tau^2 g \sin \theta \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \end{aligned}$$

Oppgave 4.

Arealet mellom kurvene $x = 0$, $x = \pi/4$, $y = \sin x$ og $y = \cos x$ er:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/4} dx \int_{\sin x}^{\cos x} dy \\ &= \int_0^{\pi/4} dx (\cos x - \sin x) \\ &= \left| \sin x + \cos x \right|_0^{\pi/4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \\ &= \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

Oppgave 5.

Arealet mellom de to parablene $x^2 - 4$ og $-x^2 + 4$ skal bestemmes. Vi innser at vi må integrere fra $x = -2$ til $x = 2$:

$$A = \int_{-2}^2 dx \int_{x^2-4}^{-x^2+4} dy = \int_{-2}^2 dx(8 - 2x^2) = \left[8x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-2}^2 = \frac{64}{3}.$$

Til slutt skal vi finne volumet av objektet vi får når dette dreies omkring y -aksen. Hvis vi tenker oss en tynn søyle i posisjon x , med bredde dx og høyde $8 - 2x^2$, og roterer denne en hel runde rundt y -aksen, skulle vi få et tynt sylinderskall med volum

$$dV = dx \cdot (8 - 2x^2) \cdot 2\pi x.$$

Dette må integreres fra $x = 0$ til $x = 2$ for å få med hele volumet:

$$V = \int dV = \int_0^2 dx \cdot (8 - 2x^2) \cdot 2\pi x = 2\pi \left[4x^2 - \frac{1}{2}x^4\right]_0^2 = 2\pi[16 - 8] = 16\pi.$$

Oppgave 6.

Vi skal bestemme Taylorrekkene til noen kjente funksjoner:

a

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin 0 + x \cos 0 - \frac{1}{2}x^2 \sin 0 - \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 \cos 0 + \dots \\ &= x - \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos 0 - x \sin 0 - \frac{1}{2}x^2 \cos 0 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 \sin 0 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + x\alpha + \frac{1}{2}x^2\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \\ \text{med } \binom{\alpha}{n} &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}\end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \ln 1 + x \frac{1}{1+0} - \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{(1+0)^2} + \frac{2}{2 \cdot 3}x^3 \frac{1}{(1+0)^3} + \dots \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}\end{aligned}$$

Oppgave 7.

Vi skal bestemme Ω til andre orden i den lille parameteren ε/Ω_0 :

$$\Omega = -\varepsilon + \sqrt{\Omega_0^2 + \varepsilon^2} = -\varepsilon + \Omega_0 \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{\Omega_0^2}}$$

Vi kan nå bruke Taylorrekke **c** ovenfor, med $\alpha = 1/2$ og $x = \varepsilon^2/\Omega_0^2 \ll 1$, og skrive

$$\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{\Omega_0^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{\Omega_0^2}$$

Dermed:

$$\begin{aligned}\Omega &\approx -\varepsilon + \Omega_0 + \Omega_0 \cdot \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{\Omega_0^2} \\ &= \Omega_0 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2\Omega_0} \\ &= \Omega_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{\Omega_0} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{\Omega_0^2} \right)\end{aligned}$$

Med oppgitte tall har vi:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{2\pi}{T_d} = \frac{2\pi}{26,8 \cdot 3600 \text{ s}} = 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \\ \Omega_0 &= \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{9,81}{25,0}} \text{ s}^{-1} = 0,626 \text{ s}^{-1} \\ \frac{\epsilon}{\Omega_0} &= 1,0 \cdot 10^{-4} \ll 1 \quad (\text{nesten ubetydelig}) \\ \frac{\epsilon^2}{\Omega_0^2} &= 1,0 \cdot 10^{-8} \quad (\text{helt uten betydning})\end{aligned}$$

Neste ledd i summen vil være "av orden" $\varepsilon^3/\Omega_0^3 \approx 1,0 \cdot 10^{-12}$.

Oppgave 8.

Kulas høyde over likevektspunktet er

$$h = L - L \cos \theta = L(1 - \cos \theta).$$

For små θ kan vi bruke Taylorrekke **b** ovenfor: $\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$. Dermed er

$$E_p = mgh = mgL(1 - \cos \theta) \approx mgL \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 \right) \right) = \frac{1}{2} mgL\theta^2;$$

altså så lenge $\theta \ll 1$.

