TFY4115 Fysikk (MTELSYS/MTTK/MTNANO)
Løsningsforslag for øving 1

Oppgave 1.

La oss betegne bevegelsesretningen som x-retningen, med $x = 0$ som stedet der fallskjermhopperen treffer snøfonna. Med konstant akselerasjon $a = -50g$ i x-retningen, har en for $t > 0$ konstant-akselerasjonslikningene

$$v(t) = v_0 + at; \qquad x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

Eliminer t mellom disse to ligningene for å finne $v(x)$ eller $x(v)$:

$$x = v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a\frac{(v-v_0)^2}{a^2} \qquad \Rightarrow \qquad 2ax = v^2 - v_0^2.$$

(Eller du kunne skrevet opp denne tidløse konst.-aksel.-likningen direkte.) Inntrengningsdybden x_i ved tida t_i er det punktet der $v(t_i) = 0$,

$$x_i = \frac{v_0^2}{-2a} = \frac{40^2}{2 \cdot 50 \cdot 9,8}\,\mathrm{m} = \underline{1,6\,\mathrm{m}}.$$

Fallet bremses ned til $v = 0$ i løpet av tida

$$t_i = \frac{v_0 - 0}{-a} = \frac{40}{50 \cdot 9,8}\,\mathrm{s} = \underline{0,082\,\mathrm{s}}.$$

Oppgave 2.

a. Når akselerasjonen er en gitt funksjon av hastigheten, gir det en differensialligning for $v(t)$. I vårt tilfelle:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -bv^2 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{\mathrm{d}v}{v^2} = b\mathrm{d}t$$

Integrerer fra start $(0, v_0)$ til vilkårlig tidspunkt (t, v):

$$-\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v^2} = b\int_0^t \mathrm{d}t \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = b(t-0) \qquad \Rightarrow \qquad \underline{v(t) = \frac{v_0}{1 + bv_0 t}}.$$

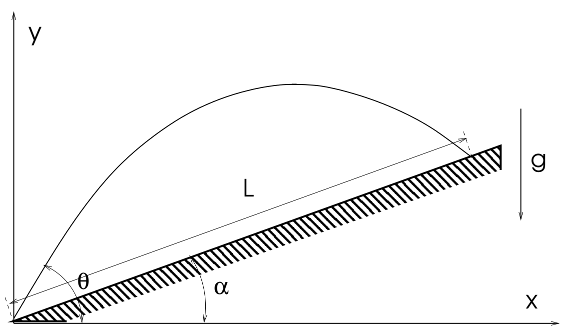
b. Hastighetens halveringstid T er derved gitt som

$$v(T) = \frac{v_0}{1 + bv_0 T} = \frac{1}{2}v_0 \qquad \Rightarrow \qquad bv_0 T = 1 \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{1}{bv_0} = \frac{1}{4,0 \cdot 1,50}\,\mathrm{s} = 0,167\,\mathrm{s}.$$

Ved start er $x = 0$ og i løpet av halveringstida har kula beveget seg strekningen $x(T)$. Denne bestemmes fra $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, eller $\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$, som gir

$$x(T) = \int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \frac{v_0}{1 + bv_0 t'}\,\mathrm{d}t' = \frac{1}{b}\ln(1 + bv_0 T) = \frac{1}{4,0\,\mathrm{m}^{-1}} \cdot \ln 2 = \underline{0,173\,\mathrm{m}}.$$

Oppgave 3.



a. Situasjonen er skissert i figuren til venstre.

b. Vi velger utskytningsstedet som origo. Derved er begynnelsesbetingelsene

$$x(0) = 0 \qquad y(0) = 0,$$
$$v_x(0) = v_0 \cos\theta \qquad v_y(0) = v_0 \sin\theta.$$

I x-retningen er akselerasjonen lik null (når luftmotstanden neglisjeres), og derved er $x(t) = v_0 \cos\theta \cdot t$.
I y-retningen er akselerasjonen $-g$, slik at

$$y(t) = v_y(0)t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Når pila treffer bakken ved tida t_b har den beveget seg $x(t_\mathrm{b})$ i x-retning og $y(t_\mathrm{b})$ i y-retning. Da må ifølge figuren $y(t_\mathrm{b})/x(t_\mathrm{b}) = \tan\alpha$. Derved kan t_b bestemmes:

$$\frac{v_0 \sin\theta \cdot t_\mathrm{b} - \frac{1}{2}gt_\mathrm{b}^2}{v_0 \cos\theta \cdot t_\mathrm{b}} = \tan\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \underline{t_\mathrm{b} = \frac{2v_0}{g} \cdot (\sin\theta - \cos\theta\,\tan\alpha)}.$$

Rekkevidden blir da (se figuren)

$$L = \frac{x(t_\mathrm{b})}{\cos\alpha} = \frac{v_0\cos\theta\cdot t_\mathrm{b}}{\cos\alpha} = \frac{2v_0^2\cdot(\cos\theta\,\sin\theta - \cos^2\theta\,\tan\alpha)}{g\cos\alpha} = \underline{\frac{2v_0^2\cdot\cos^2\theta}{g\cdot\cos\alpha}\cdot(\tan\theta-\tan\alpha)} \qquad \text{Q.E.D.}$$

c. Vinkelen som gir størst rekkevidde $L(\theta)$ finnes ved å derivere mhp. θ og sette deriverte lik null.

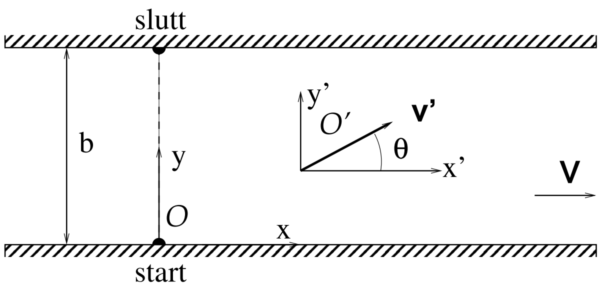
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta} &= \frac{2v_0^2}{g\cos\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\big(\cos\theta\sin\theta - \cos^2\theta\tan\alpha\big)\\ &= \frac{2v_0^2}{g\cos\alpha}\big(-\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta\,\tan\alpha\big)\\ &= \frac{2v_0^2}{g\cos\alpha}\left(\cos 2\theta+\sin 2\theta\,\tan\alpha\right).\end{aligned}$$

$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta} \equiv 0$ og løst mhp. θ gir resultatet

$$\tan 2\theta_\mathrm{maks} = -\cot\alpha = \tan(\alpha+\pi/2) \qquad\Rightarrow\qquad \theta_\mathrm{maks} = \underline{\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}}.$$

Dette innebærer at på flat mark ($\alpha = 0$), er $\theta_\mathrm{maks} = 45°$, i tråd med erfaringer.

Oppgave 4.



a. Legger inn et koordinatsystem med x langs elvebredden og y på tvers. I figuren til venstre er referansesystemet fast i elvebredden betegnet O, mens referansesystemet som følger elvestrømmen er betegnet O'.

Vannets hastighet $\vec{V} = V\,\hat{\mathbf{x}}$ er gitt i system O. Båtens hastighet i system O' er som oppgitt

$$\vec{v}' = v'_x\,\hat{\mathbf{x}} + v'_y\,\hat{\mathbf{y}} = v'\cos\theta\,\hat{\mathbf{x}} + v'\sin\theta\,\hat{\mathbf{y}}\,,$$

og båtens hastighet i system O er

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} = (v'_x + V)\,\hat{\mathbf{x}} + v'_y\,\hat{\mathbf{y}} = (v'\cos\theta + V)\,\hat{\mathbf{x}} + v'\sin\theta\,\hat{\mathbf{y}}\,,$$

Hastighetskomponentene er altså $\qquad \underline{v_x = v'\cos\theta + V};\quad \underline{v_y = v'\sin\theta}.$

b. Tida det tar å ro til den andre elvebredden er gitt av y-hastigheten: $t_\mathrm{r} = \frac{b}{v_y} = \frac{b}{v'\sin\theta}$. I denne tida vil båtens forskyvning langs elvebredden være gitt av hastigheten v_x:

$$x_\mathrm{l} = v_x t_\mathrm{r} = (v'\cos\theta + V)\frac{b}{v'\sin\theta}. \tag{1}$$

Tida det tar å gå tilbake til punktet rett overfor startpunktet er $t_\mathrm{g} = x_\mathrm{l}/v_\mathrm{g}$, vi har da (fornuftig nok) antatt $x_\mathrm{l} \geq 0$, dvs. båten har drevet litt med elvestrømmen evt. treffer rett på. (Dersom $x_\mathrm{l} < 0$ vil $t_\mathrm{g} = -x_\mathrm{l}/v_\mathrm{g}$.) Til sammen blir dette

$$t(\theta) = t_\mathrm{r} + t_\mathrm{g} = \underline{\frac{b}{v'\sin\theta}\left[1 + \frac{v'}{v_\mathrm{g}}\cdot\cos\theta + \frac{V}{v_\mathrm{g}}\right]}. \tag{2}$$

c. Vi minimerer totaltiden med hensyn på roretningen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}t(\theta)}{\mathrm{d}\theta} &= 0\\ \frac{-b\cos\theta}{v'\sin^2\theta}[...] + \frac{b}{v'\sin\theta}\cdot\frac{v'(-\sin\theta)}{v_\mathrm{g}} &= -\frac{b}{v'\sin^2\theta}\cdot\left[\left(1+\frac{V}{v_\mathrm{g}}\right)\cos\theta + \frac{v'}{v_\mathrm{g}}\overbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}^{=1}\right] = 0.\end{aligned}$$

Av dette følger at vinkelen som minimaliserer tida er gitt som

$$\cos\theta_\mathrm{min} = -\frac{v'/v_\mathrm{g}}{1+V/v_\mathrm{g}} = \underline{-\frac{v'}{V+v_\mathrm{g}}}. \tag{3}$$

Med de oppgitte tallverdiene for hastighetene får en $\cos\theta_\mathrm{min} = -3,0/(2,00+5,0) = -0,4286$ som gir $\underline{\theta_\mathrm{min} = 115°}$. Et ikke urimelig resultat!

d. Men dersom vi setter $V = 0$, gir uttrykket $\cos\theta_{\rm min} = -v'/v_{\rm g}$. Dette kan umulig være riktig! Dersom elva stopper opp (dersom vi rett og slett skal krysse stillestående vann) må det raskeste være å ro rett over! Altså: I dette tilfellet burde $\theta_{\rm min} = 90°$ og $\cos\theta_{\rm min} = 0$. Men hvor resonnerte vi feil i pkt. **b** eller **c**?

Problemet ligger i forutsetningen $x_{\rm l} > 0$. Vi ser fra likn. (1) at dette gjelder bare dersom $v'\cos\theta + V > 0$ (siden b, v' og $\sin\theta$ alle er positive). Vi forutsetter altså $\cos\theta > -(V/v')$. Minimumsverdien $\cos\theta_{\rm min}$ i (3) er derfor bare gyldig dersom

$$-\frac{v'}{V + v_{\rm g}} > -\frac{V}{v'} \qquad \Rightarrow \qquad v'^2 < V(V + v_{\rm g}).$$

Hva skjer så dersom denne ulikheten for de oppgitte størrelsene ikke er oppfylt? For å forstå dette må vi gå tilbake til funksjonen $t(\theta)$ i likn. (2) og ta høyde for at dette faktisk er *to* funksjoner. Den vi allerede har funnet i (2) er korrekt dersom vi lander *nedenfor* målpunktet, slik at $x_{\rm l} > 0$. Denne funksjonen kaller vi heretter $t^+(\theta)$.

Men vi trenger også $t^-(\theta)$, som svarer til at båten lander *ovenfor* det endelige målet tvers over elva. Da er som nevnt ovenfor $t_{\rm g} = -x_{\rm l}/v_{\rm g}$ og $t^+(\theta)$ i likn. (2) blir erstatta av

$$t^-(\theta) = t_{\rm r} + t_{\rm g} = \frac{b}{v'\sin\theta} - \frac{x_{\rm l}}{v_{\rm g}} = \frac{b}{v'\sin\theta}\left[1 - \frac{v'}{v_{\rm g}}\cdot\cos\theta - \frac{V}{v_{\rm g}}\right]. \tag{4}$$

De to funksjonene møtes der $x_{\rm l} = 0$, dvs. for vinkelen θ_s gitt av $v'\cos\theta_s + V = 0$, altså for vinkelen

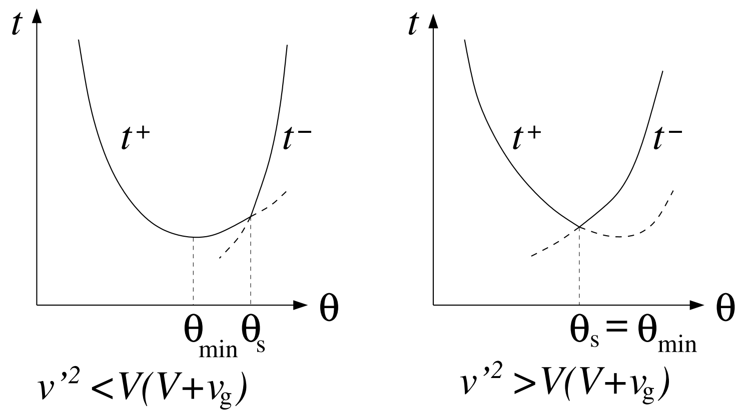
$$\cos\theta_s = -V/v'. \tag{5}$$

Skal dette ha mening, må $V < v'$. Dette har en åpenbar fysisk tolkning: Det er ikke mulig å havne rett over elva med en rofart som er mindre enn elvas strømningshastighet!

Figurene til høyre viser hva som skjer i de to parameterområdene.

Dersom $x_{\rm l} > 0$ og $v'^2 < V(V + v_{\rm g})$, er minimumstida gitt av minimum i funksjonen $t^+(\theta)$, med resultatet $\cos\theta_{\rm min} = -v'/(V + v_{\rm g})$ og $\theta_{\rm min} < \theta_s$. Minimum finnes på den konvensjonelle måten, ved å sette den deriverte lik null.

I parameterområdet der $v'^2 > V(V + v_{\rm g})$ er situasjonen kvalitativt annerledes. Der gir minimering av $t^+(\theta)$ et ufysikalsk resultat. Minimumtida er $t(\theta_s)$ der $t^+ = t^-$. Ingen av de to funksjonene som møtes i minimumspunktet har dervivert lik null der.



Den fysikalske tolkningen av dette er at i *hele* parameterområdet $v'^2 > V(V + v_{\rm g})$ lønner det seg å ro rett over elva, direkte til målet, med vinkelen θ_s gitt av (5) mellom roretning og elvas strømretning.

Eksemplet viser at minimering kan være en mer sammensatt prosess enn den konvensjonelle. Det gjelder å bruke hodet, og sjekke resultatene mot sunn fornuft. Om det kan være til noen trøst: Flere årskull studenter og lærere overså fullstendig det vi her har diskutert, og tok for gitt at resultatet under pkt. **c** var *hele* svaret. Men den enkle sjekken vi foretok avlørte umiddelbart at det ikke kunne være tilfelle.

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 21. juni 17.