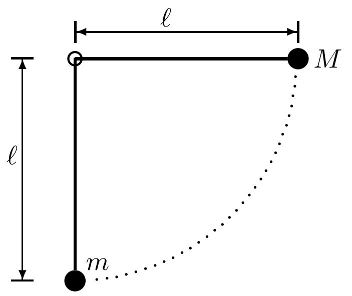
TFY4115 Fysikk (MTELSYS/MTTK/MTNANO)
Løsningsforslag for øving 4

Oppgave 1.



a. Energibevaring gir

$$\frac{1}{2}MV^2 = Mg\ell \quad \Rightarrow \quad \underline{V = \sqrt{2gl}}.$$

Snorkrafta S gitt av Newton 2 med sentripentalakselerasjon oppover:

$$\sum F = S - Mg = MV^2/\ell \quad \Rightarrow \quad \underline{S = Mg + MV^2/\ell = 3Mg}.$$

M.a.o er snorkrafta gitt av summen av vekta Mg og "sentrifugalkrafta" MV^2/ℓ,

b. Siden støtet mellom M og m er perfekt elastisk, er både energi og bevegelsesmengde (impuls) bevart. Derved har vi to likninger til bestemmelse av de to ukjente V' og v'. Siden vi regnet V som positiv, innebærer det at hastigheter rettet mot venstre er positive, mens de som er rettet mot høyre er negative. (Vi kunne selvsagt valgt omvendt fortegnskonvensjon, den vi vanligvis bruker). De to likningene er

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} \quad MV & = MV' + mv' & \text{(bevaring bev.mengde)} \\ \text{(II)} \quad MV^2/2 & = MV'^2/2 + mv'^2/2 & \text{(energibevaring - elastisk støt).} \end{array}$$

Likningene kan omskrives til

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} \quad M(V - V') & = mv' \\ \text{(II)} \quad M(V - V')(V + V') & = mv'^2 \end{array}$$

Vi dividerer så likning (II) med (I) og finner

$$V + V' = v'.$$

Sammen med likning (I), dividert med M, gir denne siste likningen umiddelbart

$$v' = \frac{2V}{1 + m/M} = \underline{\frac{2M}{M+m}V},$$

og derved, ved (I),

$$V' = \underline{\frac{M-m}{M+m}V}.$$

Dersom $m \gg M$ vil vi forvente at M spretter tilbake. I den grensen gir resultatet over $V' = -V$, og $v' = 0$, som forventet. Omvendt, dersom $m \ll M$ vil vi forvente at M fortsetter med (tilnærmet) uendret hastighet etter støtet. Vårt resultat gir, ganske riktig, $V' = V$ i denne grensen (der $v' = 2V$).

c. Snorkreftene etter støtet finnes igjen som summen av vekt og sentrifugalkraft

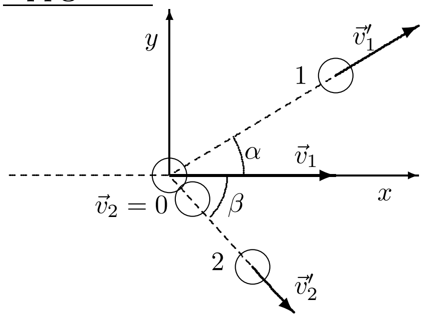
$$S' = Mg + M\frac{V'^2}{\ell} = Mg\left[1 + \frac{V^2}{g\ell}\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\right] = \underline{Mg\left[1 + 2\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\right]},$$

$$s' = mg + m\frac{v'^2}{\ell} = mg\left[1 + \frac{V^2}{g\ell}\left(\frac{2M}{M+m}\right)^2\right] = \underline{mg\left[1 + 2\left(\frac{2M}{M+m}\right)^2\right]}.$$

d.

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{2gl} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1,00}\,\mathrm{m/s} = 4,43\,\mathrm{m/s} \\ V' &= \frac{M-m}{M+m}V = \frac{10-20}{20+10} \cdot 4,43\,\mathrm{m/s} = -1,48\,\mathrm{m/s} \\ v' &= \frac{2M}{M+m}V = \frac{2 \cdot 10}{20+10} \cdot 4,43\,\mathrm{m/s} = 2,95\,\mathrm{m/s} \\ S &= 3Mg = 3 \cdot 0,0100\,\mathrm{kg} \cdot 9,81\,\mathrm{m/s}^2 = 0,294\,\mathrm{N} \\ S' &= 0,120\,\mathrm{N} \\ s' &= 0,371\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

Oppgave 2.



a. Figur til venstre

b. De to massene er like og kan derfor forkortes bort fra alle regninger. Bevegelsesmengdebevarelse forenkles da til bevarelse av vektorsummen $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$,

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2'$$

siden puck nr. 2 lå stille før den ble truffet av puck nr. 1. På komponentform blir dette

$$\begin{aligned} v_1 &= v_1' \cos\alpha + v_2' \cos\beta \\ 0 &= v_1' \sin\alpha - v_2' \sin\beta. \end{aligned}$$

Med $\alpha = 30°$ og $\beta = 45°$ er $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ og $\cos\beta = \sin\beta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, som gir

$$\begin{aligned} 2v_1 &= v_1'\sqrt{3} + v_2'\sqrt{2} \\ 0 &= v_1' - v_2'\sqrt{2} \end{aligned}$$

med løsning

$$\underline{v_1' = 29\,\mathrm{m/s} \quad ; \quad v_2' = 21\,\mathrm{m/s}}.$$

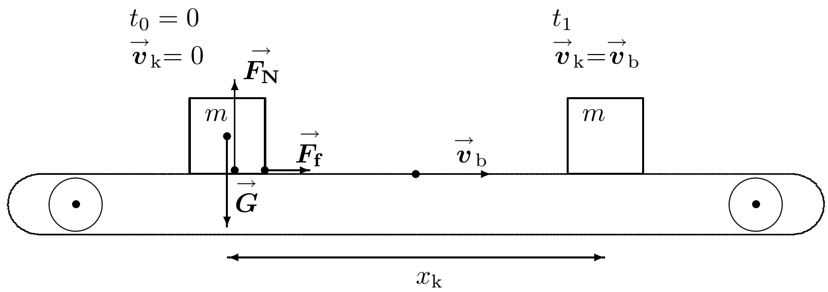
c. De kinetiske energiene før og etter støtet er

$$E_\mathrm{K} = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad ; \quad E_\mathrm{K}' = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2.$$

Det relative energitapet i støtet er derved

$$\frac{E_\mathrm{K} - E_\mathrm{K}'}{E_\mathrm{K}} = \frac{v_1^2 - v_1'^2 - v_2'^2}{v_1^2} = \underline{20\,\%}.$$

Oppgave 3.



a. De kreftene som virker på legemet er tyngden $\vec{\boldsymbol{G}}$, normalkrafta $\vec{\boldsymbol{F}}_\mathrm{N}$ og friksjonskrafta $\vec{\boldsymbol{F}}_\mathrm{f}$, som vist i figuren. Newtons 2. lov i vertikal retning samt uttrykk for friksjonskraft gir oss

$$F_\mathrm{N} = G = mg \qquad F_\mathrm{f} = \mu_\mathrm{k} F_\mathrm{N} = \mu_\mathrm{k} mg\,.$$

Kartongens økte kinetiske energi må være lik tilført arbeid. Det er kun friksjonskrafta som gjør arbeid, og dennes arbeid **på kartongen** blir derfor

$$\underline{W_\mathrm{f,kart}} = \Delta E_\mathrm{k} = E_\mathrm{k}(t_1) - E_\mathrm{k}(t_0) = \underline{\frac{1}{2}mv_\mathrm{b}^2}\,. \tag{1}$$

b. Kartongen har flytta seg strekning x_k i forhold til laboratoriesystemet (bakken) den tida friksjonskrafta virker (se figuren over). Friksjonsarbeidet er lik friksjonskraft ganger strekning:

$$W_\mathrm{f,kart} = F_\mathrm{f}\, x_\mathrm{k} = \mu_\mathrm{k} mg\, x_\mathrm{k} \qquad \stackrel{(1)}{\Longrightarrow} \qquad x_\mathrm{k} = \underline{\frac{v_\mathrm{b}^2}{2\mu_\mathrm{k} g}}\,.$$

c. Akselerasjonen er konstant og da er $x_\mathrm{k} = \langle v \rangle \cdot t_1$, der $\langle v \rangle = \frac{1}{2}v_\mathrm{b}$ er gjennomsnittsfarten. Dette gir

$$t_1 = \frac{x_\mathrm{k}}{\langle v \rangle} = 2\frac{x_\mathrm{k}}{v_\mathrm{b}} = \frac{v_\mathrm{b}}{\mu_\mathrm{k} g}\,.$$

Akselerasjonen er $a = F_\mathrm{f}/m = \mu_\mathrm{k} g$, og vi kunne alternativt benyttet $v_\mathrm{k}(t_1) = v_\mathrm{b} = \frac{v_\mathrm{b}}{a} = \frac{v_\mathrm{b}}{\mu_\mathrm{k} g}$.

Eller vi kunne bruke impulsloven og få $F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v \quad \Rightarrow \quad t_1 = \Delta t = \frac{mv_\mathrm{b}}{F_\mathrm{f}} = \frac{mv_\mathrm{b}}{\mu_\mathrm{k} mg} = \frac{v_\mathrm{b}}{\mu_\mathrm{k} g}$.

d. Transportbåndet har beveget seg en avstand $x_{\mathrm{b}}(t_1) = v_{\mathrm{b}} t_1 = v_{\mathrm{b}} \dfrac{v_{\mathrm{b}}}{\mu_{\mathrm{k}} g} = \underline{2\, x_{\mathrm{k}}}$.

e. Bandet flytter seg altså $2x_{\mathrm{k}}$ den tida friksjonskrafta F_{f} virker. Arbeid **på bandet** fra friksjonskrafta er derfor

$$W_{\mathrm{f,band}} = F_{\mathrm{f}} \cdot 2\, x_{\mathrm{k}} = 2W_{\mathrm{f,kart}} = \underline{m v_{\mathrm{b}}^2}\,,$$

og dette er energi som bandet må tilføres for å holde konstant fart. (At tilført energi er 2× friksjonsarbeid vil gjelde uansett størrelse av friksjonskoeffisient, form på pakke o.l.) Vi kan alternativt argumentere med at bandet må tilføres energi tilsvarende friksjonsarbeidet på kartongen (tapt som varme) pluss økning i kinetisk energi (konservert energi), totalt

$$W_{\mathrm{band}} = W_{\mathrm{f,kart}} + \Delta E_{\mathrm{k}} = 2 \cdot \Delta E_{\mathrm{k}} = \underline{m v_{\mathrm{b}}^2}\,.$$

Oppgave 4.

Hydrogenatomets masse er m_{H} og oksygenatomets masse er $m_{\mathrm{O}} = 16\, m_{\mathrm{H}}$. Massefellespunktet er definert som:

$$\vec{r}_{\mathrm{cm}} = \frac{\Sigma_i m_i \vec{r}_i}{\Sigma_i m_i}$$

Vannmolekylets massefellespunkt blir:

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{cm}} &= \frac{\Sigma_i m_i x_i}{\Sigma_i m_i} = \frac{2 \cdot m_{\mathrm{H}} \cdot d \cdot \cos(105^\circ/2)}{m_{\mathrm{O}} + 2m_{\mathrm{H}}} = \frac{2 \cdot m_{\mathrm{H}} \cdot d \cdot \cos(105^\circ/2)}{18\, m_{\mathrm{H}}} = \underline{0,068 \cdot d} \\ y_{\mathrm{cm}} &= \frac{\Sigma_i m_i y_i}{\Sigma_i m_i} = \underline{0} \quad \text{Pga. symmetri om } x\text{-aksen} \end{aligned}$$

Vannmolekylets massefellespunkt ligger altså veldig nærme oksygenatomets massefellespunkt.

Oppgave 5.

a. I et koordinatsystem som følger raketten før første utskyting er $p = 0$. Bevaring av p i den infinitesimale utskytingen gir da:

$$0 = (m - \mathrm{d}m)\mathrm{d}v - u_{\mathrm{ex}}\mathrm{d}m \quad \Rightarrow \quad m\mathrm{d}v - \mathrm{d}m\,\mathrm{d}v = u_{\mathrm{ex}}\mathrm{d}m\,.$$

Her er $\mathrm{d}m\,\mathrm{d}v$ infinitesimal av andre orden og kan strykes. Vi får derfor

$$\underline{m\mathrm{d}v = u_{\mathrm{ex}}\mathrm{d}m}\,.$$

b.

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{u_{\mathrm{ex}}}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \underline{\frac{u_{\mathrm{ex}}}{m}\beta}\,. \tag{2}$$

Med oppgitte verdier for forbrenningsraten β, relativ hastighet u_{ex} og rakettmasse $m = m_0 = 2,55 \cdot 10^5$ kg, blir akselerasjonen

$$a(t=0) = \frac{3,27 \cdot 10^3\,\mathrm{m/s}}{2,55 \cdot 10^5\,\mathrm{kg}} \cdot 480\,\mathrm{kg/s} = \underline{6,16\,\mathrm{m/s^2}}\,.$$

c. I løpet av forbrenningen er massen $m(t) = m_0 - \beta t$ og etter $t_{\mathrm{b}} = 60{,}0$ s redusert til

$$m(t_{\mathrm{b}}) = 2,55 \cdot 10^5\,\mathrm{kg} - 480\,\mathrm{kg/s} \cdot 60,0\,\mathrm{s} = 2,262 \cdot 10^5\,\mathrm{kg}.$$

Hastighetsendringen finnes ved å integrere likn. (2) fra $t = 0$ til t_{b}:

$$\begin{aligned} \int_{v(0)}^{v(t_{\mathrm{b}})} \mathrm{d}v &= \beta u_{\mathrm{ex}} \int_0^{t_{\mathrm{b}}} \frac{\mathrm{d}t}{m_0 - \beta t} = \beta u_{\mathrm{ex}} \left[-\frac{1}{\beta} \ln(m_0 - \beta t) \right]_0^{t_{\mathrm{b}}} \\ \Delta v &= v(t_{\mathrm{b}}) - v(0) = u_{\mathrm{ex}} \ln \frac{m_0}{m_0 - \beta t_{\mathrm{b}}} = 3,27\,\mathrm{km/s} \cdot \ln \frac{2,55}{2,262} = \underline{392\,\mathrm{m/s}} \quad (= 1411\,\mathrm{km/h})\,. \end{aligned}$$

Hvis vi antar konstant akselerasjon under hele forbrenningen: $a \approx a(t=0) = 6,16\,\mathrm{m/s}$, ville vi fått $\Delta v = a \cdot t_{\mathrm{b}} = 6,16\,\mathrm{m/s} \cdot 60\,\mathrm{s} = 369\,\mathrm{m/s}$, altså litt grov underestimering.

Dette er eksempel på akselerasjon av ikke-konstant masse, dvs. $F = ma$ ville ikke fungere. Det er ingen ytre krefter F.

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 21. sep. 16.