TFY4115 Fysikk (MTELSYS/MTTK/MTNANO)
Løsningsforslag for øving 6

Oppgave 1.

a. Treghetsmomentet til ei skive er I_0, og treghetsmomentet til begge skivene er $2I_0$. Spinnet må være bevart siden det er ingen netto kraftmoment på skivene:

$$\tau_{\rm tot} = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad L_{\rm i} = L_{\rm f}$$

$$I_0\omega_{\rm i} = 2I_0\omega_{\rm f} \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega_{\rm f} = \frac{\omega_{\rm i}}{2}} \tag{1}$$

b. Endringen i kinetisk energi er:

$$\Delta E_{\rm k} = E_{\rm k,2} - E_{\rm k,1} = \frac{1}{2}\cdot 2I_0\omega_{\rm f}^2 - \frac{1}{2}I_0\omega_{\rm i}^2 = I_0\frac{1}{4}\omega_{\rm i}^2 - \frac{1}{2}I_0\omega_{\rm i}^2 = \underline{-\frac{1}{4}I_0\omega_{\rm i}^2} \tag{2}$$

Halve rotasjonsenergien går over til varme pga friksjonen mellom platene. Slik var det også for translasjonsenergien når en kartong ble sluppet ned på et transportband i en tidligere øving.

Oppgave 2.

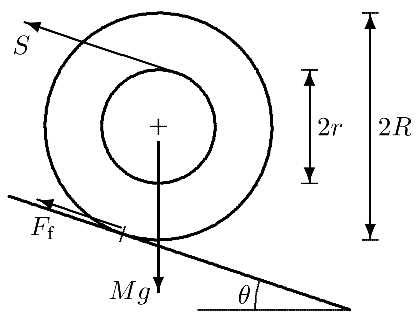
a. Treghetsmomentet til skiva er $I_{\rm s} = \frac{1}{2}MR^2$, og treghetsmomentet til ett prosjektil skutt inn i skiva ved radius r er $I_{\rm p} = mr^2$. Det totale treghetsmomentet for skiva med n prosjektil blir:

$$I_{\rm tot} = I_{\rm s} + nI_{\rm p} = \underline{\frac{1}{2}MR^2 + nmr^2} \tag{3}$$

b. Ved starten er det kun prosjektilene som har spinn, dvs $L_{\rm i} = nL_0$. Når prosjektilene treffer skiva, vil skiva starte å rotere. Skiva med n prosjektiler vil få en vinkelhastighet $\omega_{\rm f}$, og spinnet er $L_{\rm f} = I_{\rm tot}\omega_{\rm f}$. I denne prosessen er spinnet bevart:

$$\begin{aligned} L_{\rm i} &= L_{\rm f} \\ nL_0 &= I_{\rm tot}\omega_{\rm f} \\ \omega_{\rm f} &= \frac{nL_0}{I_{\rm tot}} = \underline{\frac{nL_0}{\frac{1}{2}MR^2 + nmr^2}}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Oppgave 3.



a. Her har vi fire ukjente: θ_0, S, $F_{\rm f}$, $F_{\rm N}$. Dette krever fire likninger. Når snella holdes i ro av snora og friksjonen, gjelder Newton 1:

Normalt skråplan: $\sum F_\perp = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\rm N} = Mg\cos\theta \quad$ (I)

Langs skråplan: $\sum F_{||} = 0 \quad \Rightarrow \quad Mg\sin\theta = F_{\rm f} + S \quad$ (II)
hvor $F_{\rm f}$ er friksjonskrafta.

Spinnlikning: $\sum \tau = 0 \quad \Rightarrow \quad S\,r = F_{\rm f}\,R \quad$ (III)

Statisk friksjonskraft kan ligge mellom null og en øvre grense:
$F_{\rm f} \le \mu_{\rm s}F_{\rm N} = \mu_{\rm s}Mg\cos\theta$. (IV)

$F_{\rm f}$ må ha retning oppover. Hvis $F_{\rm f}$ er nedover, vil S og $F_{\rm f}$ rotere i samme retning og (III) vil ikke kunne oppfylles.

Ved grensa $\theta = \theta_0$ – dvs. der hvor snella akkurat glipper fra underlaget og begynne å rulle/slure – er friksjonskrafta lik det maksimale: $F_{\rm f} = \mu_{\rm s}Mg\cos\theta_0$.

Likning (III) gir $S = (R/r)F_{\rm f}$ som settes inn i likn. (II) og gir

$$Mg\sin\theta_0 - F_{\rm f} - (R/r)F_{\rm f} = 0 \tag{5}$$

Innsetting i dette av grenseverdien av F_f gir ei likning for θ_0:

$$Mg\sin\theta_0 = \mu_\mathrm{s} Mg\cos\theta_0 (1+R/r) \qquad \Rightarrow \qquad \tan\theta_0 = \mu_\mathrm{s}(1+R/r), \tag{6}$$

og dermed

$$\underline{\theta_0 = \arctan\left[\mu_\mathrm{s}(1+R/r)\right]}, \tag{7}$$

og snorkrafta

$$\underline{S = \frac{R}{r}F_\mathrm{f} = \frac{R}{r}\mu_\mathrm{s} Mg\cos\theta_0\,,} \quad \text{Alternative uttrykk: } S = \frac{mgR}{r+R}\sin\theta_0 = Mg\left(\sin\theta_0 - \mu_\mathrm{s}\cos\theta_0\right)\,. \tag{8}$$

b. Når snella har begynt å slure, må likn. (II) og (III) erstattes av Newtons 2.lov. Vinkelen er nå gitt lik $\theta\,(\geq \theta_0)$, og de fire ukjente blir: a, S_1, F_f, F_N. Snorkrafta blir en annen enn tidligere, derfor nytt symbol, og akselerasjonen a langs skråplanet blir en ukjent. Friksjonskrafta nå er gitt av den *kinetiske* friksjonskoeffisienten μ_k:

$$F_\mathrm{f} = \mu_\mathrm{k} F_\mathrm{N} = \mu_\mathrm{k} Mg\cos\theta. \tag{9}$$

Likning (I) bestemmer F_N og likn. (9) bestemmer F_f, slik at vi har igjen bare to ukjente, a og S_1. To likninger:

Newton 2 langs skråplan: $\sum F_{||} = Ma \quad \Rightarrow \quad Mg\sin\theta - F_\mathrm{f} - S_1 = Ma \quad$ (IIb)

Spinnlikning: $\sum \tau = I\dot\omega \quad \Rightarrow \quad -F_\mathrm{f}\,R + S_1\,r = I\dot\omega \quad$ (IIIb)

der I = treghetsmomentet om hjulaksen. Vi har valgt a positiv nedover og positiv ω mot klokka (= den retningen der virkelig går). Når snella rutsjer nedover rulles snora ut med hastighet $v = \omega\,r$ (IKKE $v = \omega R$!), og $\dot\omega = \dot v/r = a/r$. N2-likningene (IIb) og (IIIb) gir da (vi venter litt med å sette inn for F_f):

$$M\,g\sin\theta - F_\mathrm{f} - S_1 \;=\; Ma \tag{10}$$

$$-F_\mathrm{f}R + S_1\,r \;=\; I\,(a/r). \tag{11}$$

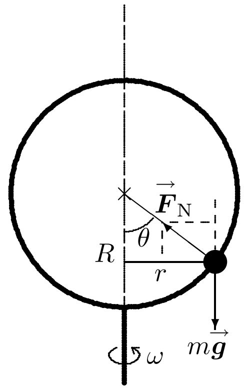
To likninger og to ukjente (a og S_1). Eliminerer S_1 fra likn. (10) og setter inn i likn. (11):

$$S_1 = M\,g\sin\theta - F_\mathrm{f} - Ma \quad \stackrel{(11)}{\Longrightarrow} \quad -F_\mathrm{f}R + Mgr\sin\theta - F_\mathrm{f}r = I\,(a/r) + Mar\,. \tag{12}$$

Løsning av a, litt smarte divisjoner og innsetting av F_f gir

$$\underline{a = g\,\frac{\sin\theta - \mu_\mathrm{k}\cos\theta\left(1+\frac{R}{r}\right)}{1+I/(Mr^2)}}\,. \tag{13}$$

Oppgave 4.



a. Om vi analyserer med Newtons lover i labsystem eller i et system som følger kula og betrakter sentrifugalkraften, skjønner vi at kula pga. tyngdekraften må legge seg i bunnen ($\theta = 0$) når $\omega = 0$ og ved svært stor hastighet vil kula presses så langt ut som mulig, dvs. $\theta \to 90°$ når $\omega \to \infty$.

b. To krefter virker på kula: Tyngdekraft $m\vec{g}$ og normalkraft fra underlaget: $\vec{F}_\mathrm{N}$. Normalkrafta kan dekomponeres i vertikal og horisontal retning, se nedenfor.

c. Når kula er i "likevekt", roterer den med ringen i en avstand $r = R\sin\theta$ fra rotasjonsaksen (se figuren). Rotasjonshastigheten er:

$$v = \frac{\text{omkrets}}{\text{omløpstid}} = \frac{2\pi r}{2\pi/\omega} = \omega r\,.$$

I z-retning (langs rotasjonsaksen) er et ingen akselerasjon, slik at sum av krefter må være lik null:

$$mg = F_\mathrm{N}\cdot\cos\theta \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{N} = \frac{mg}{\cos\theta}$$

I radiell retning har vi sentripetalakselerasjon $a_\mathrm{c} = \omega^2 r = \omega^2 R\sin\theta$, og den eneste krafta som kan bidra til dette er komponenten av F_N i radiell retning. Derfor:

$$ma_\mathrm{c} = F_\mathrm{N}\cdot\sin\theta \quad \Rightarrow \quad m\omega^2 R\sin\theta = \frac{mg}{\cos\theta}\cdot\sin\theta \tag{14}$$

Forkorter $\sin\theta$ (forutsatt $\theta \neq 0$), løser mhp. θ og finner hva likevektsvinkelen er for gitt ω:

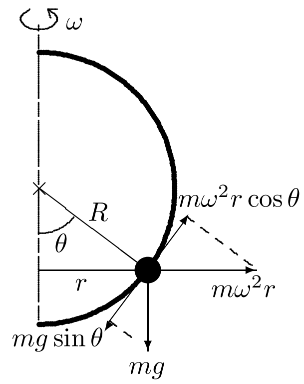
$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R} \qquad \text{eller} \qquad \underline{\theta(\omega) = \arccos\frac{g}{\omega^2 R}}. \tag{15}$$

d. Grenseverdien $\omega \to \infty$ gir $\theta(\omega) = \arccos 0 = \pi/2$ som stemmer med det vi resonnerte oss frem til under pkt.a.

Men for *små* verdier av ω er resultatet ikke helt som ventet! Som kjent kan ikke $\cos\theta$ bli større enn 1, slik at når $\frac{g}{\omega^2 R} > 1$ har ikke likn. (15) løsning.

For å forstå fysikken bak dette, kan vi velge å se det fra koordinatsystem som følger kula, slik at vi inkluderer sentrifugalkrafta $F_\mathrm{s} = m\omega^2 r = m\omega^2 R \sin\theta$. Se figuren. Denne vil trekke kula *oppover* ringen med sin komponent $F_\mathrm{s}\cos\theta$, mens tyngdens komponent $mg\sin\theta$ trekker nedover ringen. Skal kula stå i ro må disse være like:

$$mg\sin\theta = m\omega^2 R\sin\theta \cdot \cos\theta. \tag{16}$$



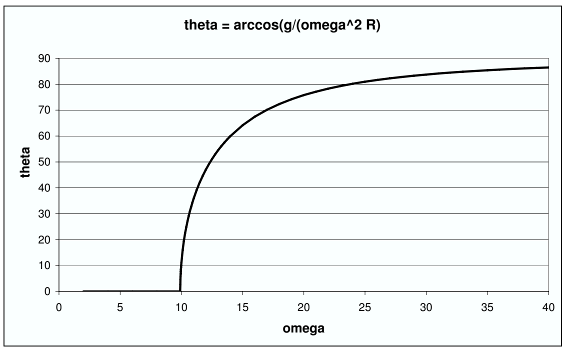
Når faktoren $\sin\theta$ forkortes bort, gjenstår den konstante vekta mg, som skal balanseres mot sentrifugalkraftleddet $m\omega^2 R\cos\theta$. Men når ω blir liten nok, har dette leddet ingen sjanse i konkurransen, konstanten mg vinner uansett og likevektsposisjon blir i bunnen av ringen, $\theta = 0$. Eneste mulighet å oppfylle likn. (16) og (14) er at $\sin\theta = 0$. Denne løsningsmuligheten mistet vi når vi forkortet med $\sin\theta$ for å oppnå likn. (15).

e. Tallverdier: Med $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ får vi

A. $\omega = 2\pi \cdot 3\ \mathrm{s}^{-1} = 18,85\ \mathrm{s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{9,81\ \mathrm{m/s^2}}{(18,85\ \mathrm{s}^{-1})^2 \cdot 0,10\ \mathrm{m}}\right) = \arccos(0,276) = \underline{74^\circ}$.

B. $\omega = 2\pi \cdot 1\mathrm{s}^{-1} = 6,28\ \mathrm{s}^{-1} \ \Rightarrow\ \theta = \arccos\left(\frac{9,81}{(6,28)^2 \cdot 0,10}\right) = \arccos(2,48)$.

Men $\cos\theta$ kan ikke bli større enn 1, som betyr at det ikke finnes noen vinkel som svarer til $\arccos(2,48)$, som diskutert ovenfor. Ved rotasjonsfrekvenser under grensetilfellet $\cos\theta = g/\omega^2 R \equiv 1$ vil kula forbli ved $\theta = 0$. Denne minste frekvensen er $\omega_\mathrm{min} = \sqrt{\frac{g}{R}} = 9,90\ \mathrm{s}^{-1}$, dvs. $f_\mathrm{min} = \frac{1}{2\pi} \cdot \omega = 1,6$ Hz.
En graf av $\theta(\omega) = \arccos \frac{g}{\omega^2 R}$ vil forklare hva som skjer (se figuren). Grafen viser at θ øker veldig brått når grensehastigheten ω_min er passert. Merk deg at det ikke er friksjonen som er årsak til dette forløpet, vi har null friksjon mellom kule og ring.

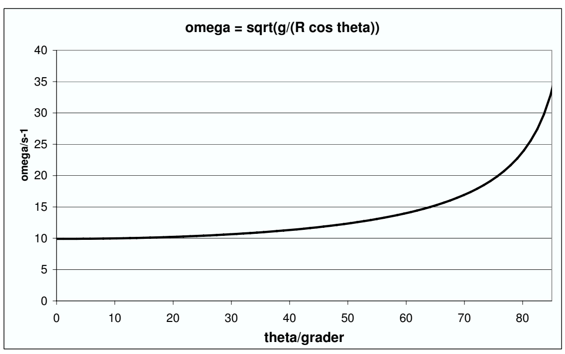


Ekstraoppgave:

f. For kjeglependelen er snorkrafta S analog med normalkrafta F_N ovenfor. Ellers er argumentasjonen helt lik og likn. (15) gir

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R\cos\theta}}.$$

Graf til høyre. For $\theta \to 90^\circ$ vil $\omega \to \infty$. For $\theta \to 0^\circ$ vil $\omega \to \sqrt{\frac{g}{R}}$.
For kjeglependelen er det naturlig å betrakte vinkelen θ som pådraget mens resultatet er vinkelhastigheten ω som pendelen innstiller seg på. Ved eksperimenter finner vi at ω nærmer seg en fast verdi (ikke null) når θ går mot null. Vi ser av uttrykket over at denne verdien er $\omega_\mathrm{min} = \sqrt{\frac{g}{R}}$. Det er det samme vi observerer i ringproblemet ovenfor, men i det problemet er ω pådraget: Når vi lar rotasjonen bli langsom har vi løsning bare inntil frekvensen er $\omega_\mathrm{min} = \sqrt{\frac{g}{R}}$. Under denne frekvensen har vi bare løsningen $\theta = 0$ og ringen faller brått ned.



Det kan bemerkes at en planpendel med lengde R har ved små vinkelutslag den samme frekvensen: $\omega_\mathrm{min} = \sqrt{\frac{g}{R}}$ (forelesning eller Ch. 14.5 i Y & F). En planpendel får noe lavere ω ved større vinkelutslag, mens en kjeglependel får høyere ω ved større vinkelutslag.

$\mathcal{A.M}$i. 8. sep. 17.