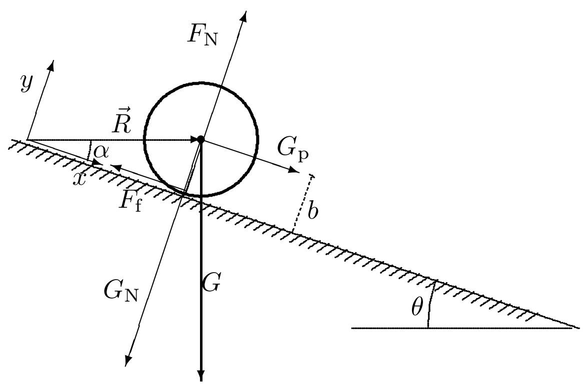
TFY4115 Fysikk (MTELSYS/MTTK/MTNANO)
Løsningsforslag for øving 7

Oppgave 1.



a. Krefter: G, F_N og F_f. Tyngdens y-komponent $G_N = mg\cos\theta$ nulles ut av normalkrafta F_N fra skråplanet. G's x-komponent er $G_p = mg\sin\theta$. Nettokrafta peker derfor langs skråplanet: $\underline{\vec{F} = (mg\sin\theta - F_f)\,\hat{\mathbf{x}}}$.

Kraftmomentet for G_N nulles mot kraftmomentet for F_N. Friksjonskrafta F_f har ingen moment om A. Derfor har kun G_p kraftmoment:

$$\vec{\tau} = \vec{R}\times\vec{G}_p = (-\hat{\mathbf{z}})\cdot\overbrace{R\cdot\sin\alpha}^{=b}\cdot G_p = \underline{-\hat{\mathbf{z}}\; b\cdot mg\sin\theta}\,.$$

(Vinkelen α mellom $\vec{R}$ og $\vec{G}_p$ og den effektive armen til G_p er lik b uansett hvor kula er plassert).

b. Når kula ruller nedover må vinkelhastigheten $\vec{\omega}$ og dermed også egenspinnet $\vec{L} = I_0\vec{\omega}$ peke i $-\hat{\mathbf{z}}$-retning (høyrehåndsregel). Banespinnet $\vec{R}\times m\vec{V}$ må også peke i negativ z-retning med $\vec{R}\times\vec{V} = bV$. Ved rulling er $\omega = V/b$, dermed

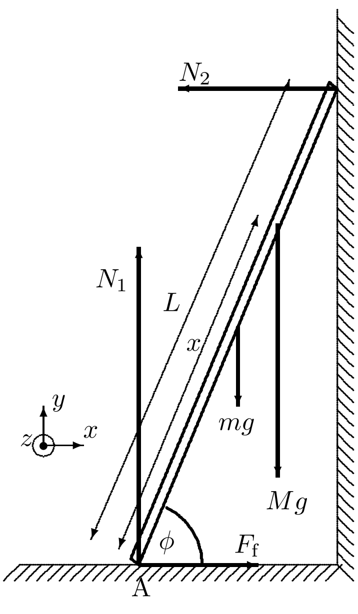
$$\vec{L} = m\vec{R}\times\vec{V} + I_0\vec{\omega} = mbV(-\hat{\mathbf{z}}) + \frac{2}{5}mb^2\frac{V}{b}(-\hat{\mathbf{z}}) = \underline{-\hat{\mathbf{z}}\;\frac{7}{5}mbV}\,.$$

c. Newtons 2. lov for rotasjon, $\vec{\tau} = \mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t$ gir

$$bmg\sin\theta = \frac{7}{5}mb\dot{V} = \frac{7}{5}mb\,a \quad\Rightarrow\quad \underline{a = \frac{5}{7}g\sin\theta}\,.$$

Translasjonsakselerasjonen blir mindre enn for friksjonsfri bevegelse (da er $a = g\sin\theta$) fordi en del av høydeenergien omsettes til kinetisk rotasjonsenergi og ikke bare translasjonsenergi.

Oppgave 2.



Vi har tre ukjente krefter (se figuren): N_1, N_2 og F_f, og trenger tre likninger. Vi har to likninger fra Newton 1 i x- og y-retning

$$N_1 = (M+m)g \;\;;\;\; N_2 = F_f\,,$$

og den tredje likning fra rotasjonslikevekt (Newton 1 rotasjon), der vi velger referansepunkt A = kontaktpunktet mellom stigen og underlaget. Alle kreftenes dreiemomenter er rettet langs $\pm z$-aksen, og vi velger positiv rotasjonsretning mot klokka.

$$\begin{aligned}\tau_{z,\text{tot}} &= N_2\overbrace{L\sin\phi}^{\text{eff.arm}} - Mg\overbrace{x\cos\phi}^{\text{eff.arm}} - mg\cdot\overbrace{\frac{1}{2}L\cos\phi}^{\text{eff.arm}} = 0.\\ \Rightarrow\quad N_2 &= \frac{\cos\phi}{\sin\phi}\left[\frac{x}{L}M + \frac{1}{2}m\right]g.\end{aligned}$$

Fra ovenfor er $F_f = N_2$ og siden betingelsen for at stigen ikke skal skli er at

$$F_f \le \mu_s N_1 = \mu_s(M+m)g,$$

følger kravet vi skulle vise:

$$\begin{aligned}\mu_s(M+m)g \;\;&\ge\;\; N_2 = \frac{1}{\tan\phi}\left[\frac{x}{L}M + \frac{1}{2}m\right]g\\ \tan\phi \;\;&\ge\;\; \frac{(x/L)M + \frac{1}{2}m}{\mu_s(M+m)}.\end{aligned}$$

b. Med de oppgitte tallene innsatt, finner vi

$$\frac{(x/L)M + \frac{1}{2}m}{\mu_s(M+m)} = \frac{(9/10)\cdot 80 + \frac{1}{2}\cdot 12}{\mu_s\cdot 92} = \frac{0,848}{\mu_s}$$

$$\begin{aligned}\mu = 0,50 \quad&\Rightarrow\quad \tan\phi \ge 1,70 \quad\Rightarrow\quad \phi \ge 60^\circ\\ \mu = 0,40 \quad&\Rightarrow\quad \tan\phi \ge 2,12 \quad\Rightarrow\quad \phi \ge 65^\circ\\ \mu = 0,30 \quad&\Rightarrow\quad \tan\phi \ge 2,83 \quad\Rightarrow\quad \phi \ge 71^\circ\end{aligned}$$

Oppgave 3.

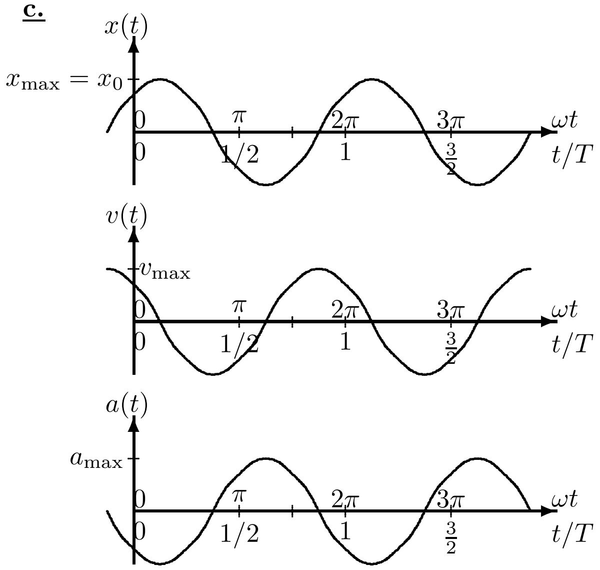
a. $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\frac{3\pi}{4}\ \mathrm{s}^{-1}} = \dfrac{8}{3}\ \mathrm{s} = \underline{2,67\ \mathrm{s}}.$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{3}{8}\ \mathrm{Hz} = \underline{0,375\ \mathrm{Hz}}. \qquad \text{(Eller fra } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\frac{3\pi}{4}\ \mathrm{s}^{-1}}{2\pi} = \frac{3}{8}\ \mathrm{Hz.)}$$

b.

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \theta) \tag{1}$$
$$v(t) = \dot{x}(t) = -x_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \theta) \tag{2}$$
$$a(t) = \dot{v}(t) = -x_0 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \theta) \tag{3}$$

c.



d. Ifølge likn. (2) er den maksimale hastigheten

$$|v_{\max}| = x_0\omega = 0,5\ \mathrm{m} \cdot \frac{3\pi}{4}\ \mathrm{s}^{-1} = \underline{1,18\ \mathrm{m/s}}.$$

Denne oppnås når $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, dvs. når $a(t) = 0$. Ifølge likn. (3) er dette ved

$$\cos(\omega t + \theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega t + \theta = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Med $\theta = -\frac{\pi}{4}$ og $\omega = \frac{2\pi}{T}$ gir dette

$$\underline{t} = \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi}{\frac{2\pi}{T}} = \underline{T \cdot \left(\frac{3}{8} + \frac{n}{2}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots}.$$

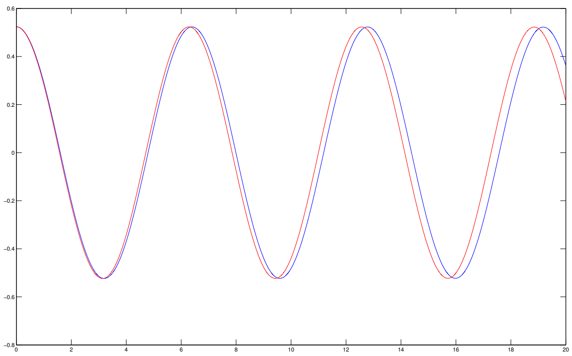
Ved $n = 0, 2, 4, \ldots$, dvs. $t = \dfrac{3}{8}T,\ \dfrac{11}{8}T, \ldots$ har hastigheten minimum,

og ved $n = 1, 3, 5, \ldots$, dvs. $\underline{t = \dfrac{7}{8}T,\ \dfrac{15}{8}T, \ldots}$ har den maksimum. Jfr. grafen for $v(t)$ ovenfor.

Oppgave 4. Svingetid som funksjon av amplituden

a. Scriptet kjøres med ulike inputverdier av amplituden `theta0grad`. Tidsinkrementet `dt` kan også varieres mens de andre parametrene kan holdes konstant.

Nedenfor til venstre vises resultatet med `theta0grad` = 30 grader, `dt = 0.001`, `omega0` = 1,0 der blå=ikke-lineær og rød=lineær. Tabellen nedenfor til høyre viser hva programmet rapporterer for svingetida T. Svingetid fra analytisk løsning av den lineære likningen er $T = 2\pi/\omega_0 = 6,283$ s.



ampl	T/s	T_{lin}/s	T/T_{lin}
1°	6,2830	6,2830	1,000000
2°	6,2840	6,2830	1,000159
5°	6,2860	6,2830	1,000477
10°	6,2950	6,2830	1,001910
15°	6,3100	6,2830	1,004297
20°	6,3310	6,2830	1,007640
30°	6,3930	6,2830	1,017508
60°	6,7430	6,2830	1,073213
90°	7,4160	6,2830	1,180328

b. Ett døgn har $60 \cdot 60 \cdot 24\,\text{s} = 86400\,\text{s}$, slik at f.eks. for $\theta_0 = 5°$ vil klokka sinkes $86400\,\text{s} \cdot 0,000477 = 41,2\,\text{s}$ i forhold til svært liten amplitude. Dette er ikke akseptabelt. For $\theta_0 = 1°$ vises ingen forskjell på linær og ikke-lineær løsning, men dersom vi øker til finere tidsinkrement `dt` vil det bli forskjell også her. For $\theta_0 = 30°$ blir døgnforsinkelsen $86400\,\text{s} \cdot 0,0175 = 1487$ s = 25 minutter.

c. Sammenlikninger av $T(\theta_0)$ fra den numeriske løsningen og den oppgitte formelen for $T(\theta_0)$ funnet fra løsning av den ikke-lineære likningen ved rekkeutvikling:

$$\begin{aligned}
T(\theta_0) &= T_0 \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \sin^6\frac{\theta_0}{2} + \ldots \right] \\
T(5°) &= T_0 \left[1 + 0,000476 + 0,000001 + \ldots\right] = T_0 \cdot 1,000476 \\
T(15°) &= T_0 \left[1 + 0,004259 + 0,000041 + \ldots\right] = T_0 \cdot 1,00430
\end{aligned}$$

Bra overenstemmelse med den numeriske løsningen.

d. For $\theta_0 = 180°$ har pendelen en ustabil likevekt på toppen. Den numeriske løsningen viser at den holder seg på toppen i atskillige sekunder, men begynner så å svinge med en riktig estimert svingetid. Dersom du øker tidsinkrementet `dt` noe , vil du se at den ustabile likevekten vil fortone seg ganske annerledes. Den kan forbli i likevekt over svært lang tid, eller svinge andre vegen. For f.eks. $\theta_0 = 179,999°$ er det ikke likevekt og svingningen blir ikke særlig avhengig av tidsinkrementet `dt`.

Er du spesielt interessert i en approksimativ analytisk løsning av den ikke-lineære likningen, les denne artikkelen: `http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/070707.pdf` eller denne: `http://www.pgccphy.net/ref/nonlin-pendulum.pdf`.

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 6. okt. 17.