Inst. fysikk 2017

TFY4115 Fysikk (MTELSYS/MTTK/MTNANO)
Løsningsforslag for øving 8

Oppgave 1. Dempet svingning.

a. Vi utleder fra Newtons 2. lov, $\Sigma F = ma$:

$$\begin{aligned} -b\dot{x} - kx &= m\ddot{x} \\ \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x &= 0 \\ \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0\,, \quad \text{altså med } \gamma = \frac{b}{2m} \text{ og } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \end{aligned}$$

b. Det kreves her bare en grov kvalitativ forklaring, uten likninger:

Overkritisk: $\gamma > \omega_0$ Systemet søker likevekt uten svingninger (sum av to $e^{-\alpha t}$-funksjoner).

Kritisk: $\gamma = \omega_0$ Systemet søker likevekt på raskest mulig måte (raskere enn overkritisk).

Underkritisk: $\gamma < \omega_0$ Systemet svinger frem og tilbake med avtakende amplityde $e^{-\gamma t}$.

Kun underkritisk demping gir et cos-ledd og dermed svingning, for overkritisk og kritisk demping blir det ulike eksponentialfunksjoner. Ved kritisk demping kan det oppstå én maksverdi (skjer når startfarten er positiv), eller én minverdi (skjer når startfarten er tilstrekkelig negativ).

c.

$x(t) = A\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega_\mathrm{d} t + \phi)$

$\dot{x}(t) = -\gamma A\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega_\mathrm{d} t + \phi) - \omega_\mathrm{d} A\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega_\mathrm{d} t + \phi)$

$\ddot{x}(t) = \gamma^2 A\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega_\mathrm{d} t + \phi) + \gamma\omega_\mathrm{d} A\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega_\mathrm{d} t + \phi) + \gamma\omega_\mathrm{d} A\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega_\mathrm{d} t + \phi) - \omega_\mathrm{d}^2 A\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega_\mathrm{d} t + \phi)$

Innsatt i dempet svingelikning får vi:

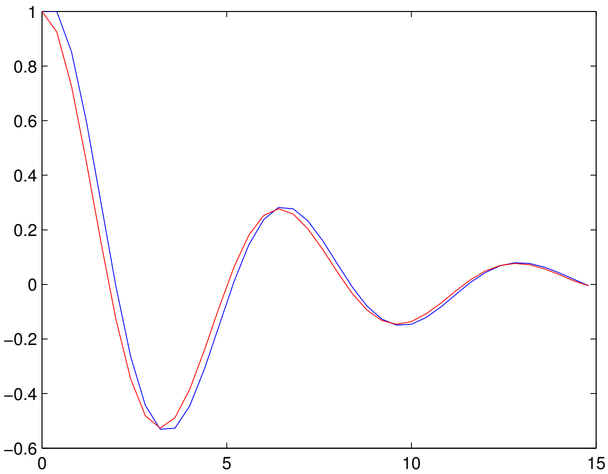
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \left[\gamma^2 - \omega_\mathrm{d}^2 + 2\gamma(-\gamma) + \omega_0^2\right] A\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega_\mathrm{d} t + \phi) + \left[\gamma\omega_\mathrm{d} + \gamma\omega_\mathrm{d} + 2\gamma(-\omega_\mathrm{d})\right] A\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega_\mathrm{d} t + \phi) = 0.$$

Siste hakeparantes er null. Første hakeparantes null når $\omega_\mathrm{d}^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$, som er mulig dersom $\omega_0^2 > \gamma^2$.

d. Den matematiske forklaringen på at det må oppgis to startverdier er at vi integrerer en andreordens differensiallikning, som gir to konstanter som må bestemmes/oppgis gjennom to startvilkår. Dette er som regel startamplituden $x(t_0)$ og startfarten $\dot{x}(t_0)$. I Matlab-scriptet oppgis to startverdier (amplituder) `x(1)` og `x(2)`. Disse gir starthastigheten ved $\dot{x}(t_0) =$ `(x(2)-x(1))/dt`.

Scriptet kjøres med ulike inputverdier γ og ω_0 slik alle typer demping vises. Foreslått tidsintervall $\Delta t = 0,1$ gir god tilpasning, som viser at Verlet-integrasjonen er veldig robust.

Til høyre resultatet for en underkritisk demping med $\gamma = 0,2, \omega_0 = 1,0$ og null startfart. Det er brukt $\Delta t = 0,4$, som er svært grovt men likevel gir et fornuftig resultat (blå=numerisk, rød=analytisk):



e.

i) Siden amplituden for en dempet svingning avtar eksponensielt (oppgitt løsning), kan vi uttrykke amplituden:

$$A'(t) = Ae^{-\gamma t} \qquad \Rightarrow \qquad \ln A' = \ln A - \gamma \cdot t\,,$$

som med $t = 4,0$ min $= 240$ s gir

$$\gamma = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{A}{A'}\right) = \frac{1}{120\ \mathrm{s}}\ln\left(\frac{6,00^\circ}{5,10^\circ}\right) = 1,354\cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1} = \underline{1,35\cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}}\,.$$

ii) $T_\mathrm{d} = 2\pi/\omega_\mathrm{d}$, så vi må finne verdi for $\omega_\mathrm{d} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. For en pendel med oppgitt $l = 1,00$ m er

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} = \frac{9,81\ \mathrm{m/s^2}}{1,0\ \mathrm{m}} = 9,81\ \mathrm{s}^{-2}.$$

Fra i) er $\gamma^2 = 1,83\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}^{-2}$, slik at $\omega_0^2 \gg \gamma^2$. Vi regner ikke på peanuts, så med meget god tilnærmelse er

$\omega_\mathrm{d} \approx \omega_0 = 3,13\ \mathrm{s}^{-1}$. Dette gir

$$T_\mathrm{d} = \frac{2\pi}{\omega_\mathrm{d}} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{3,13\ \mathrm{s}^{-1}} = \underline{2,01\ \mathrm{s}.}$$

Det at $\omega_0^2 \gg \gamma^2$ i uttrykket for ω_d viser at dempingen i dette tilfellet er fullstendig neglisjerbar når det gjelder perioden for pendelen, den påvirker bare amplituden.

<u>f.</u> EKSTRA, STARTHASTIGHET ULIK NULL. I Matlab-scriptet er gitt to startverdier (amplituder) `x(1)`$= x(t_0)$ og `x(2)`$= x(t_1)$. Disse gir starthastigheten $\dot{x}(t_0)$ = `(x(2)-x(1))/dt`. Det oppgitte scriptet fungerer for $x(t_1) \neq x(t_0)$, men den analytiske løsningen må ha andre uttrykk for konstantene ϕ, A og B når startfarten $\dot{x}(t_0) \neq 0$. Disse kan vi finne:

Underkritisk:

$$x(t) = A\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega_\mathrm{d} t + \phi) \quad \text{og} \quad \dot{x}(t) = -\gamma A\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega_\mathrm{d} t + \phi) - \omega_\mathrm{d} A\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega_\mathrm{d} t + \phi)$$

$$\Rightarrow \quad x(0) = A\,\cos(\phi) \quad \text{og} \quad \dot{x}(0) = -\gamma A\,\cos(\phi) - \omega_\mathrm{d} A\,\sin(\phi)$$

Løst m.h.p. ϕ og A gir

$$\tan\phi = -\frac{\gamma}{\omega_d} - \frac{\dot{x}(0)}{x(0)} \cdot \frac{1}{\omega_d} \quad \text{og} \quad A = \frac{x(0)}{\cos\phi}$$

Overkritisk:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left(A\mathrm{e}^{\alpha t} + B\mathrm{e}^{-\alpha t}\right) \quad \text{og} \quad \dot{x}(t) = -\gamma\mathrm{e}^{-\gamma t}\left(A\mathrm{e}^{\alpha t} + B\mathrm{e}^{-\alpha t}\right) + \mathrm{e}^{-\gamma t}\left(A\alpha\mathrm{e}^{\alpha t} - B\alpha\mathrm{e}^{-\alpha t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x(0) = A + B \quad \text{og} \quad \dot{x}(0) = -\gamma\,(A+B) + \alpha(A-B)$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{x(0)}{2}\left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\right) + \frac{\dot{x}(0)}{2\alpha} \quad \text{og} \quad B = \frac{x(0)}{2}\left(1 - \frac{\gamma}{\alpha}\right) - \frac{\dot{x}(0)}{2\alpha}$$

Kritisk:

$$x(t) = (A + tB)\,\mathrm{e}^{-\gamma t} \quad \text{og} \quad \dot{x}(t) = B\,\mathrm{e}^{-\gamma t} + (A + tB)\,(-\gamma)\,\mathrm{e}^{-\gamma t}$$

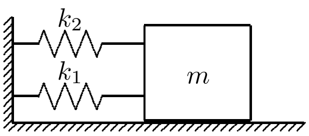
$$\Rightarrow \quad x(0) = A \quad \text{og} \quad \dot{x}(0) = B - \gamma A$$

$$\Rightarrow \quad A = x(0) \quad \text{og} \quad B = \gamma x(0) + \dot{x}(0).$$

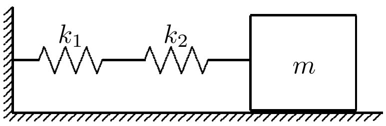
I Matlabprogrammet: $x(0) \rightarrow$ `x(1)` og $\dot{x}(0) \rightarrow$ `vstart = (x(2)-x(1))/dt` samt i overkritisk brukt `omegad` for α.

<u>Oppgave 2.</u> Kopling av fjærer.

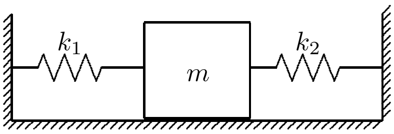
<u>**a.**</u>



<u>**b.**</u>



<u>**c.**</u>



<u>a.</u> Med utsving x fra likevektsstilling er krafta på massen m de to fjærkrefter $-k_1 x$ og $-k_2 x$. Newton 2 gir svingelikningen:

$$-k_1 x - k_2 x = m\ddot{x} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} + \left(\frac{k_1}{m} + \frac{k_1}{m}\right) x = 0\,.$$

Sammenlikning med standard SHM-likning $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ gir at svingefrekvensen ω er gitt av

$$\omega^2 = \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} = \omega_1^2 + \omega_2^2, \quad \text{altså} \quad \underline{\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}\,.$$

Uttrykket $\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m}$ viser at effektiv fjærstivhet for parallellkoplede fjærer er $k = k_1 + k_2$.

<u>b.</u> Når m forskyves x mot høyre strekkes fjærene x_1 og x_2, og disse er ulike dersom $k_1 \neq k_2$. Krafta F på massen m forplanter seg gjennom begge fjærene med samme strekk (Newton 3 og masseløse fjærer). Dermed er $F = -k_1 x_1 = -k_2 x_2$, som gir $x = x_1 + x_2 = -\left(1/k_1 + 1/k_2\right) F$. Dermed er krafta som virker på klossen lik

$$F = -\frac{1}{1/k_1 + 1/k_2} x = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x$$

og Newton 2 gir

$$-\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x = m\ddot{x} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} + \frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m} x = 0\,.$$

Sammenlikning med $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ gir at svingefrekvensen ω er gitt av

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{(k_1 + k_2)m}{k_1 k_2} = \frac{m}{k_2} + \frac{m}{k_1} = \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_1^2} = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_1^2 \omega_2^2}\,, \quad \text{altså} \quad \underline{\omega = \frac{\omega_1 \omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}}.$$

Uttrykket $\frac{1}{\omega^2} = \frac{m}{k} = \frac{(k_1+k_2)m}{k_1 k_2}$ viser at effektiv fjærstivhet for seriekoplede fjærer er $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

<u>c.</u> Med utsving x fra likevektsstilling vil høyre fjær k_2 presses sammen x og gi ei kraft $-k_2 x$ mot venstre på massen. Venstre fjær vil strekkes x og gi ei kraft $-k_1 x$ mot venstre. Kreftene er altså de samme som i **a.** og $\underline{\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$.

Oppgave 3. Vertikal svingning.

a. Bevegelseslikning for klossen:
$$m\ddot{x} = -kx + m. \tag{1}$$
Her har vi valgt positiv x-retning nedover. Uten tyngdefelt til stede ($g = 0$) er klossens likevektsposisjon $x = 0$, og likningen blir som for horisontal svingning om $x = 0$. I tyngdefeltet bestemmes den nye likevektsposisjonen Δx ved å sette akselerasjonen, dvs. total kraft, lik null:
$$0 = -k\Delta x + mg \quad \Rightarrow \quad \underline{\Delta x = \frac{mg}{k}}.$$

b. Med ny posisjonsvariabel $y = x - \Delta x$ får vi fra likn. (1) bevegelseslikningen
$$m\ddot{y} = -k(y + \Delta x) + mg$$
som med $k\Delta x = mg$ gir samme bevegelseslikning som for horisontal bevegelse:
$$m\ddot{y} + ky = 0$$
Klossen vil altså svinge harmonisk med vinkelfrekvens $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ omkring likevektsposisjonen $y = 0$ ($x = \Delta x$).

c. I total energi må vi inkludere tyngdens potensielle energi $E_\mathrm{p} = -mgy$ (positiv y nedover og referanse i $y = 0$). Med $x = y + \Delta x$ lik utslaget fra fjæras nøytrale stilling, får vi
$$E = -mgy + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = -mgy + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}ky^2 + ky\Delta x + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2,$$
siden $mg = k\Delta x$. Siden vi ikke har noe demping i systemet, er den totale energien E bevart. Uttrykt med startverdiene ($t = 0$) $\dot{y} = v_0$ og $y = y_0$ blir
$$\underline{E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}ky_0^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2}.$$
Dette er det samme som energi for en horisontal mk-pendel, med tilleggsenergien $\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2$ pga. fjærenergien i likevektsstillingen.

Oppgave 4. Flervalgsoppgaver

a. B. $L = I\omega$ og $\tau = \mathrm{d}L/\mathrm{d}t$ gir $\tau = F\cdot r = I\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ og dermed $I = Fr/(\omega/t) = 20\,\mathrm{N}\cdot 0{,}25\,\mathrm{m}/(60\,\mathrm{s}^{-1}/12\,\mathrm{s}) = 1{,}00\,\mathrm{kgm}^2$.

b. E. De fire stavenes massesenter har lik akselerasjon når netto ytre kraft F er den samme. Kraftas angrepspunkt har ingen betydning for tyngdepunktbevegelsen: $m\vec{a}_\mathrm{cm} = \sum\vec{F} = \vec{F}$.

c. B. De bryter mållinja samtidig. Massesenter har lik akselerasjon når netto ytre kraft S er den samme for begge. Kraftas angrepspunkt har ingen betydning for tyngdepunktbevegelsen: $m\vec{a}_\mathrm{cm} = \sum\vec{F} = \vec{S}$. Snordraget har en arm (lik spolens radius) relativt spolens massesenter, så spolen utsettes for et ytre dreiemoment relativt massesenteret. Da gir N2 for rotasjon (spinnsatsen) at spolen får en vinkelakselerasjon, dvs. den roterer med økende vinkelhastighet.
Merk at snora til spolen må trekkes med større snorhastighet for å kompensere for rotasjonen. Dette gjør at S gjør større arbeid, og differansen er lik rotasjonsenergien spolen får.

d. A. Langs skråplanet virker tyngdens komponent ($mg\sin\theta$, der θ er helningen på skråplanet) nedover, like stor for alle tre, samt friksjonskrafta $f_i (i = 1, 2, 3)$ fra underlaget, retta oppover. Nettokrafta $mg\sin\theta - f_i$ bestemmer tyngdepunktets akselerasjon, som tydeligvis har vært størst for legeme 3, og like stor for 1 og 2. Ergo er f_3 mindre enn $f_1 = f_2$. (Dette observeres når legeme 3 har mindre treghetsmoment enn 2. F.eks. kan 3 være en massiv sylinder og 2 et sylinderskall.)

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 9. sep. 17.