TFY4115 Fysikk (MTELSYS/MTTK/MTNANO)
Løsningsforslag for øving 10

Oppgave 1. Varmekapasiteter.

Energienheten cal (kalori) er definert ved at $\underline{C_p' = 1,00 \frac{\text{cal}}{\text{g K}}}$ for vann ved 15 °C (1 cal = 4,19 J).

Luft består nesten utelukkende av toatomige molekyler med $C_p = 7/2R$, og gjennomsnittlig molar masse $M_\text{w} \approx 29$ g/mol. Dermed er med $R = 8,314$ J/mol K = 8,314/4,184 cal/(mol K) = 1,987 cal/(mol K):

$$C_p' = \frac{7}{2}R\frac{1}{M_\text{w}} = \frac{7}{2}\cdot 1,987\frac{\text{cal}}{\text{mol K}}\cdot\frac{1}{29\,\text{g/mol}} = \underline{0,24\frac{\text{cal}}{\text{g K}}} \quad \text{for luft.}$$

Metaller har $C_p' \approx 3R$, så med molvekt 55,9 g/mol er $C_p' = 3R\frac{1}{M_\text{w}} = 3\cdot 1,987\frac{\text{cal}}{\text{mol K}}\cdot\frac{1}{55,9\,\text{g/mol}} = \underline{0,11\frac{\text{cal}}{\text{g K}}}$ for jern.

Konklusjon: $\underline{C_p'(\text{vann}) \;\approx\; 4\,C_p'(\text{luft}) \;\approx\; 9\,C_p'(\text{jern})}$.

Oppgave 2. Kalorimetri: Tevann.

a) 2,5 l vann ved 12 °C er svært nær 2,5 kg. Total varmekapasitet for (kanne + vann) (i J/K) er da

$$\mathcal{C} = C'_\text{Al}\,m_\text{Al} + C'_\text{vann}\,m_\text{vann} = (0,91\cdot 0,95 + 4,19\cdot 2,5)\,\text{kJ/K} = (0,865 + 10,475)\,\text{kJ/K} = 11,34\,\text{kJ/K}.$$

Varmemengden som må tilføres er dermed

$$\underline{Q} = \mathcal{C}\cdot\Delta T = 11,34\cdot(100-12)\,\text{kJ} = 0,998\cdot 10^6\,\text{J} \equiv \underline{1,00\,\text{MJ}}$$

eller omregna til kWh:

$$\underline{Q} = 998\,\text{kJ}\cdot\frac{1\,\text{h}}{3600\,\text{s}} = 0,277\,\frac{\text{kJ h}}{\text{s}} = \underline{0,28\,\text{kWh}}$$

b) 'Energi = effekt × tid': $Q = P\cdot t \quad \Rightarrow$

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{998\,\text{kJ}}{1,5\,\text{kJ/s}} = 665,3\,\text{s} = 665,3\,\text{s}\cdot\frac{1\,\text{min}}{60\,\text{s}} = 11,09\,\text{min} = \underline{11\,\text{min}\;5\,\text{s}},$$

Siden oppgitte tall har to gjeldende siffer vil det rette svaret være: *"Tevannet koker om 11 minutter"*.
(Tida det tar å varme opp sjølve tekanna er $\frac{\mathcal{C}_\text{Al}}{\mathcal{C}}\cdot 11\,\text{min} = \frac{0,865}{11,34}\cdot 11\,\text{min} = 50\,\text{sek}$, eller *"1 minutt"*.)

Oppgave 3. Kalorimetri: Smelting av is med varmt vann.

Varmebalanse-regnskap: "Det isen opptar = det vannet avgir":

$$m_\text{is}\,[C'_\text{is}\cdot(T_0 - T_\text{is}) + L'_\text{is} + C'_\text{vann}\cdot(T_2 - T_0)] = m_\text{vann}\,C'_\text{vann}\cdot(T_1 - T_2)$$

hvor $T_0 = 0,0$ °C. Massen til 2,5 l vann er ca. 2,5 kg, men en mer presis beregning fra oppgitte data $\rho_\text{vann}(0\,°\text{C})$ og $\rho_\text{vann}(100\,°\text{C})$ gir ved interpolering $\rho_\text{vann}(75\,°\text{C}) = 0,969\,\text{g/cm}^3 = 0,969\,\text{kg/l}$. Da er $m_\text{vann} = \rho_\text{vann}V = 0,969\cdot 2,50\,\text{kg} = 2,42\,\text{kg}$.

$$\begin{aligned}
\underline{m_\text{is}} &= m_\text{vann}\cdot\frac{C'_\text{vann}\,(T_1 - T_2)}{C'_\text{is}\,(T_0 - T_\text{is}) + L'_\text{is} + C'_\text{vann}\,(T_2 - T_0)} \\
&= 2,42\,\text{kg}\cdot\frac{4,19\cdot 35\,\text{kJ/kg}}{2,00\cdot 20\,\text{kJ/kg} + 334\,\text{kJ/kg} + 4,19\cdot 40\,\text{kJ/kg}} \\
&= 2,42\,\text{kg}\cdot\frac{146,48}{541,4} = 2,42\,\text{kg}\cdot 0,271 = 0,655\,\text{kg} = \underline{0,66\,\text{kg}}
\end{aligned}$$

Oppgave 4. Fordampningsarbeid.

Ett mol vann har masse $m_\text{vann} = 18$ g, slik at fordamping av ett mol vann krever

$$Q_\text{f} = L'_\text{f}\cdot m_\text{vann} = 2257\,\text{kJ/kg}\cdot 0,018\,\text{kg} = 40,6\,\text{kJ}.$$

Arbeidet mot ytre trykk skjer ved *konstant* trykk, som er $p = 1,00\,\text{atm} = 101\,\text{kN/m}^2$ når temperaturen er 100 °C (kokepunkt). Arbeidet som må utføres ved at en vannmengde med volum V_v går over til damp med volum V_d er lik

$$W = \int_{V_\text{v}}^{V_\text{d}} p\,dV = p(V_\text{d} - V_\text{v}).$$

Dampvolumet V_d er mye større enn væskevolumet V_v, så vi sløyfer V_v (kontrollregning nedenfor). Videre antar vi dampen følger tilstandslikningen for en ideell gass, $V_\mathrm{d} = nRT/p$. Det gir

$$W = pV_\mathrm{d} = nRT = 1,00\,\mathrm{mol}\cdot 8,314\,\mathrm{JK^{-1}mol^{-1}}\cdot 373\,\mathrm{K} = 3,10\,\mathrm{kJ}.$$

Dermed er andelen arbeid

$$\frac{W}{Q} = \frac{3,10}{40,6} = 0,0764 = \underline{7,6\%}.$$

Kontroll av V_v mot V_d (for $n = 1{,}0$ mol vann og damp):

$$V_\mathrm{v} = \frac{m_\mathrm{vann}}{\rho_\mathrm{vann}} = \frac{18\,\mathrm{g}}{0,959\cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}} = 1,88\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3} = 0,0188\,\mathrm{l},$$

$$V_\mathrm{d} = \frac{nRT}{p} = \frac{1,00\,\mathrm{mol}\cdot 8,314\,\mathrm{JK^{-1}mol^{-1}}\cdot 373\,\mathrm{K}}{101\cdot 10^3\,\mathrm{N/m^2}} = 3,07\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m^3} = 30,7\,\mathrm{l}.$$

Vanndamp krever altså $30,7/0,0188 = 1630$ ganger større plass enn vann. Likevel går altså bare 7,6% av fordampningsvarmen til å utføre arbeid mot det ytre trykk. Mesteparten av energien går med til å "slite vannmolekylene fra hverandre" (hydrogenbindinger mellom vannmolekylene).

Oppgave 5. Atmosfære.

Siden lufta antas å utvide seg adiabatisk og reversibelt, kan en eller flere av adiabatligningene for ideell gass benyttes. Opplysningene er gitt for T og p slik at $T^\gamma p^{1-\gamma}$ = konst ligger nærmest (fra formelark eller forrige oppgave).

Skriver litt om:

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = T_0^\gamma p_0^{1-\gamma} \quad\Rightarrow\quad T = T_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} = T_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^\kappa,$$

der vi har definert $\kappa = \frac{\gamma-1}{\gamma}$. Luft med toatomige molekyler har $\gamma = C_p/C_V = \frac{7/2}{5/2} = 7/5$ og $\kappa = \frac{7/5-1}{7/5} = 2/7$.

Innsatt verdier:

$$T = T_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^\kappa = 293\,\mathrm{K}\left(\frac{1000}{1013}\right)^{2/7} = 291,92\,\mathrm{K}.$$

Temperaturen har altså falt $\underline{1,08\,\mathrm{K} \approx -1^\circ\mathrm{C}}$.

En mer elegant måte er å uttrykke temperaturfallet ΔT direkte ved temperaturfallet Δp:

$$\Delta T = T - T_0 = T_0\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^\kappa - 1\right] = T_0\left[\left(\frac{p_0+\Delta p}{p_0}\right)^\kappa - 1\right] = T_0\left[\left(1+\frac{\Delta p}{p_0}\right)^\kappa - 1\right].$$

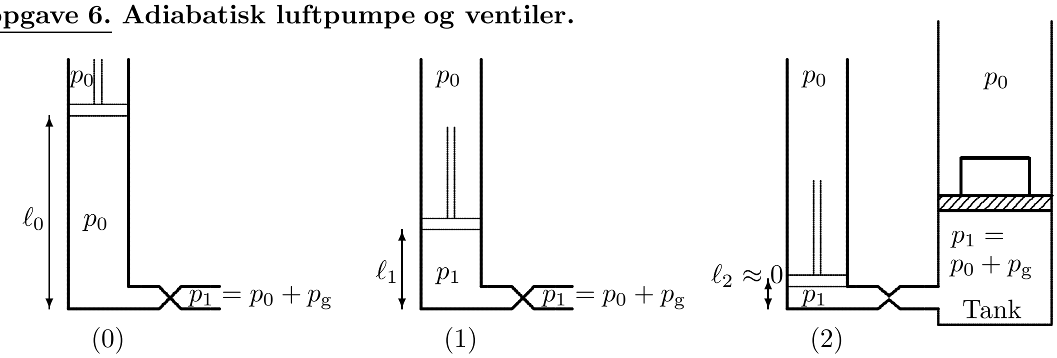
Fordi trykkfallet $\Delta p \ll p_0$ kan vi rekkeutvikle ved bruk av uttrykket $(1\pm x)^n \approx 1 \pm nx$ for små x:

$$\left(1+\frac{\Delta p}{p_0}\right)^\kappa \approx 1 + \kappa\frac{\Delta p}{p_0}$$

som gir

$$\Delta T \approx T_0\cdot\kappa\cdot\frac{\Delta p}{p_0} = 293\,\mathrm{K}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{-13}{1013} = -1,074\,\mathrm{K} = \underline{-1^\circ\mathrm{C}}.$$

Oppgave 6. Adiabatisk luftpumpe og ventiler.



Verdier for luft er oppgitt først i oppgaven:
$C_V = 5/2\,R = 20,8\,\mathrm{J\,mol^{-1}K^{-1}}$; $C_p = C_V + R = 29,1\,\mathrm{J\,mol^{-1}K^{-1}}$; $\gamma = C_p/C_V = 7/5$.

a. Adiabatisk kompresjon innebærer at begynnelses- og sluttilstanden er forbundet ved $p_0 V_0^\gamma = p_1 V_1^\gamma$, slik at $V_1 = V_0(p_0/p_1)^{1/\gamma}$. Med konstant tverrsnitt i pumpa betyr dette

$$\ell_1 = \ell_0 \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{1/\gamma} = \ell_0 \left(\frac{p_0}{p_0 + p_g}\right)^{1/\gamma} = \ell_0 \left(\frac{101}{101 + 510}\right)^{5/7} = \ell_0 \cdot 0,2765$$

Derved er

$$\Delta\ell = \ell_0 - \ell_1 = 0,7235\,\ell_0 = \underline{18,1\,\mathrm{cm}}.$$

b. For å bestemme sluttemperaturen kan vi bruke den tilsvarende adiabatforbindelsen mellom temperatur og volum i begynnelses- og sluttilstand, $T_0 V_0^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$ som gir

$$T_1 = T_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1} = T_0 \left(\frac{\ell_0}{\ell_1}\right)^{\gamma-1} = 300\,\mathrm{K} \cdot \left(\frac{1}{0,2765}\right)^{2/5} = 501,7\,\mathrm{K} = \underline{229\,^\circ\mathrm{C}}.$$

Alternativt kan vi finne T_1 fra ideell gasslov ved (0) og (1): $p_1 V_1 = nRT_1$ dividert med $p_0 V_0 = nRT_0$ gir

$$T_1 = T_0 \frac{p_1 V_1}{p_0 V_0} = T_0 \frac{p_1}{p_0}\frac{\ell_1}{\ell_0} = 300\,\mathrm{K} \cdot \frac{101 + 510}{101} \cdot 0,2765 = 502\,\mathrm{K}$$

c. Første hovedsetning på differensialform lyder $\mathrm{d}U = \text{đ}Q - \text{đ}W$, der $\text{đ}W$ er et arbeid utført *av* systemet *på* omgivelsene. Ved en adiabatisk prosess er $\text{đ}Q = 0$, og derved er $\text{đ}W = -\mathrm{d}U$. For en ideell gass er $U(T) = nC_V\,T$, slik at arbeidet som må gjøres *på* gassen for å komprimere den blir gitt ved temperaturøkningen:

$$W_\mathrm{k} = \Delta U = n\,C_V\,\Delta T = n \cdot 5/2\,R\,\Delta T = 20\,\mathrm{mol} \cdot 20,8\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}} \cdot (502 - 300)\,\mathrm{K} = \underline{84,0\,\mathrm{kJ}}.$$

Vi har her antatt at pumpa skal komprimere til (p_1, T_1) for *hvert* slag, som er OK når det er oppgitt at tanken er *stor* og derved opprettholder trykket p_g sjølv om det pumpes mer luft inn.

d. Siden trykket $p_1 = p_0 + p_\mathrm{g}$ er konstant, blir kompresjonen isobar. Det er oppgitt at all luft presses inn, dvs. hele luftvolumet $\Delta V = V_1$ presses inn med trykk p_1. Arbeidet må da bli som gitt, og vi utnytter gassloven $pV = nRT$ for denne tilstanden og får:

$$W_\mathrm{t} \quad = \quad p_1 V_1 = nRT_1 = 20 \cdot 8,31 \cdot 502\,\mathrm{J} = \underline{83,4\,\mathrm{kJ}}.$$

EKSTRAOPPGAVE:
e. Totalarbeidet pumpa må utføre er $W_\mathrm{k} + W_\mathrm{t}$. Vi må ikke glemme arbeidet som omgivelsene gjør *på* pumpa. Omgivelsene har trykk p_0 og gjør ved volumreduksjonen V_0, arbeidet $W_\mathrm{omg} = p_0 V_0$. Det totale nødvendige arbeidet for pumpa når 20 mol luft er presset inn i tanken kan derfor beregnes, idet det også nå er svært nyttig å bruke gassens tilstandsligning $pV = nRT$ ved $T = T_0$ og $T = T_1$:

$$\begin{aligned} W_\mathrm{netto} &= W_\mathrm{k} + W_\mathrm{t} - W_\mathrm{omg} = n\,C_V\,\Delta T + p_1 V_1 - p_0 V_0 \\ &= n\,C_V\,\Delta T + nRT_1 - nRT_0 = n\,C_V\,\Delta T + nR\,\Delta T \\ &= nC_p \Delta T = n\,7/2\,R\,\Delta T = 20 \cdot 29,1 \cdot 202\,\mathrm{J} = \underline{118\,\mathrm{kJ}}. \end{aligned}$$

Eller med tallstørrelser for hvert enkelt arbeid, dersom det synes enklere:

Arbeid for komprimering:	$W_\mathrm{k} = 84,0\,\mathrm{kJ}$
Arbeid for innpressing i tank:	$W_\mathrm{t} = nRT_1 = 20 \cdot 8,31 \cdot 502\,\mathrm{J} = 83,4\,\mathrm{kJ}$.
Arbeid av omgivelsene:	$W_\mathrm{omg} = p_0 V_0 = nRT_0 = 20 \cdot 8,31 \cdot 300\,\mathrm{kJ} = 49,9\,\mathrm{kJ}$
Netto arbeid av pumpe:	$W_\mathrm{netto} = W_\mathrm{k} + W_\mathrm{t} - W_\mathrm{omg} = 117,5\,\mathrm{kJ} = \underline{118\,\mathrm{kJ}}$

EKSTRAOPPGAVE:

Oppgave 7. Adiabatlikninger.

Bruker ideell gasslov: $pV = nRT \quad \Rightarrow \quad p = \dfrac{nRT}{V}$ og $V = \dfrac{nRT}{p}$. Første uttrykk innsatt i $pV^\gamma =$ konstant gir

$$\frac{nRT}{V} \cdot V^\gamma = \text{konstant} \qquad \Rightarrow \quad T \cdot V^{\gamma-1} = \text{konstant},$$

der nR inngår i (ny) konstant. Andre uttrykk innsatt i $pV^\gamma =$ konstant gir

$$p \cdot \left(\frac{nRT}{p}\right)^\gamma = \text{konstant} \qquad \Rightarrow \quad T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{konstant},$$

der nR inngår i (ny) konstant.

$\mathcal{A.M}$i. 3. okt. 17.