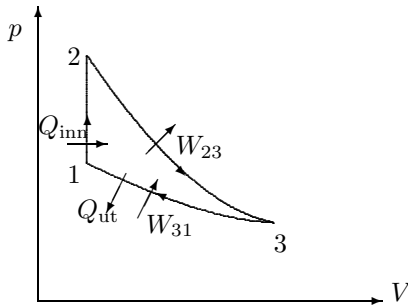


# TFY4115 Fysikk (MTELSYS/MTTK/MTNANO)

## Løsningsforslag for øving 11

### Oppgave 1.



a.  $Q$  og  $W$  er inntegnet i figuren.  $Q$  inn er positiv,  $W$  ut er positiv.

I den isokore prosessen  $1 \rightarrow 2$  gjøres ikke noe arbeid på eller av systemet. Temperaturen stiger fra  $T_1$  til  $T_2$  (gassens indre energi øker), og til dette må det tilføres varme  $Q_{\text{inn}}$ .

I den adiabatisk prosessen  $2 \rightarrow 3$  utveksles ingen varmemengde mellom system og omgivelser mens gassen gjør et arbeid på omgivelsene. Temperaturen synker.

Prosessen  $3 \rightarrow 1$  er isoterm,  $T_3 = T_1$ , og for ideell gass er den indre energien uendra  $U(T_1) = U(T_3)$ . Omgivelsene gjør arbeid  $W_{31}$  på gassen ved komprimeringen, og for å holde konstant  $U$  må denne energien tas ut som varme  $Q_{\text{ut}}$  ifølge 1. hovedsetning:  $Q_{\text{ut}} = \Delta U_{13} + W_{31} = 0 + W_{31}$ , med både  $Q_{\text{ut}}$  og  $W_{31}$  negative.

b. Kretsprosessen absorberer varme kun i prosessen  $1 \rightarrow 2$ , og varmen er

$$Q_{\text{inn}} = nC_V(T_2 - T_1).$$

c. Varme avgis kun i den isoterme prosessen  $3 \rightarrow 1$  og som begrunnet ovenfor er  $Q_{\text{ut}} = W_{31}$ , og ved videre å bruke tilstandslikningen for ideell gass,  $pV = nRT_1$ , får vi

$$Q_{\text{ut}} = W_{31} = \int_3^1 p dV = nRT_1 \int_3^1 \frac{dV}{V} = -nRT_1 \ln \frac{V_3}{V_1}.$$

d. Siden tilstandene 2 og 3 er forbundet med en adiabatisk prosess, kan vi uttrykke forholdet  $V_3/V_1 = V_3/V_2$  ved forholdet  $T_2/T_1 = T_2/T_3$ :

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_3}{V_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

og dermed

$$Q_{\text{ut}} = -nRT_1 \ln \frac{V_3}{V_1} = -nRT_1 \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Nå er

$$R \frac{1}{\gamma-1} = \frac{R}{C_p/C_V - 1} = \frac{R}{C_p - C_V} C_V = C_V$$

fordi  $C_p - C_V = R$  for en ideell gass. Enkleste form for svar blir da

$$Q_{\text{ut}} = -nC_V T_1 \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

e. For varmekraftmaskin er virkningsgraden definert som netto arbeid gjort av systemet på omgivelsene per syklus, dividert med absorbert varmemengde per syklus:

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{inn}}} = \frac{Q_{\text{inn}} + Q_{\text{ut}}}{Q_{\text{inn}}} = 1 + \frac{Q_{\text{ut}}}{Q_{\text{inn}}},$$

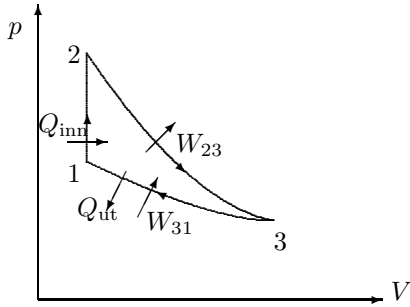
der vi brukte 1. hovedsetning for kretsprosess:  $W = Q_{(\text{netto})} = Q_{\text{inn}} + Q_{\text{ut}}$ . Resultatene funnet ovenfor gir da

$$\eta = 1 - \frac{nC_V T_1 \ln \frac{T_2}{T_1}}{nC_V (T_2 - T_1)} = 1 - \frac{T_1}{T_2 - T_1} \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

KOMMENTAR: Dette eksemplet viser at det eksplisitte uttrykket for virkningsgraden  $\eta$  er forskjellig for hver type kretsprosess. I denne kretsprosessen kan  $\eta$  (i alle fall med ideell gass som arbeidssubstans) uttrykkes ved to temperaturer, som for Carnotprosessen. Men selv om alle prosesser er reversible, er  $\eta$  lavere enn  $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2 - T_1}$  for en Carnotprosess mellom høy temperatur  $T_H = T_2$  og lav temperatur  $T_L = T_1$ . Dette er derfor et eksempel på Carnots teorem at Carnotmaskinen har høyest mulig virkningsgrad. Grunnen er at Carnotprosessen mottar all varme ved  $T_H$  og avgir all varme ved  $T_L$ , mens denne maskinen riktignok avgir all varme ved  $T_1$ , men den opptar varme ved ulike temperaturer varierende fra  $T_1$  til  $T_2$ .

For alle kretsprosesser gjelder at de virkningsgradene vi regner ut for det reversible tilfellet er et ideal en i praksis kan strekke seg mot. Enhver reell prosess vil ha større eller mindre innslag av irreversibilitet (siden en praktisk prosess ikke kan kjøres "uendelig langsomt"). Derved vil enhver reell prosess ha lavere  $\eta$  enn dens reversible idealisering.

## Oppgave 2. Entropiberegninger i kretsprosess



a. I isokoren  $1 \rightarrow 2$  er  $dQ_{\text{rev}} = nC_V dT$ . I adiabatene  $2 \rightarrow 3$  er  $dQ_{\text{rev}} = 0$ . I isoterme  $3 \rightarrow 1$  er  $dU = dQ_{\text{rev}} - dW = 0$ , derved  $dQ_{\text{rev}} = dW = p dV = nRT_1/V$ . Dette gir:

$$\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = nC_V \int_1^2 \frac{dT}{T} = nC_V \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$\Delta S_{23} = \int_2^3 \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = 0$$

$$\Delta S_{31} = \int_3^1 \frac{dQ}{T_1} = nR \int_3^1 \frac{dV}{V} = -nR \ln \frac{V_3}{V_1}$$

Den reversible, adiabatiske prosessen  $2 \rightarrow 3$  er rett og slett iso-entropisk, eller som vi sier: *isentropisk!*

For å uttrykke  $\Delta S_{31}$  med  $T_1$  og  $T_2$  bruker vi adiabatlikningen for  $2 \rightarrow 3$ , med  $T_3 = T_1$  (som i oppgave 1):

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_3^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_3}{V_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

som gir

$$\Delta S_{31} = -nR \ln \frac{V_3}{V_1} = -nR \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_2}{T_1} = -nR \frac{C_V}{C_p - C_V} \ln \frac{T_2}{T_1} = \underline{-nC_V \ln \frac{T_2}{T_1}},$$

der vi har brukt  $\gamma = C_p/C_V$  og  $C_p - C_V = R$ .

b. Fra formelsamling eller hukommelsen har vi for ideell gass:

$$S(T, V) = S_0(T_0, V_0) + nC_V \ln T/T_0 + nR \ln V/V_0.$$

Herfra kan vi bestemme alle  $\Delta S$ .

$$\Delta S_{12} = S(T_2, V_1) - S(T_1, V_1) = nC_V \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$\begin{aligned} \Delta S_{23} &= S(T_1, V_3) - S(T_2, V_1) = nC_V \ln \frac{T_1}{T_2} + nR \ln \frac{V_3}{V_1} \\ &= nC_V \ln \frac{T_1}{T_2} + nC_V \ln \frac{T_2}{T_1} = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta S_{31} = S(T_1, V_1) - S(T_1, V_3) = -nR \ln \frac{V_3}{V_1} = \underline{-nC_V \ln \frac{T_2}{T_1}},$$

der vi har brukt  $nR \ln \frac{V_3}{V_1} = nC_V \ln \frac{T_2}{T_1}$  som utregnet ovenfor.

c. Total entropiendring for maskinen er

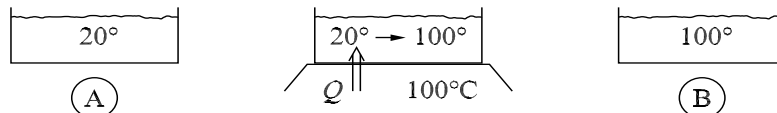
$$\underline{\Delta S} = \Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{31} = nC_V \ln \frac{T_2}{T_1} + 0 - nC_V \ln \frac{T_2}{T_1} = 0,$$

som den må være for en kretsprosess.

Siden alle prosesser er reversible er ved hver delprosess:  $\Delta S(\text{omg}) = -\Delta S(\text{syst})$ , slik at for hele kretsprosessen er  $\underline{\Delta S_{\text{omg}} = 0}$  og  $\underline{\Delta S_{\text{tot}} = \Delta S_{\text{omg}} + \Delta S = 0}$ .

## Oppgave 3. Entropiendringer ved oppvarming.

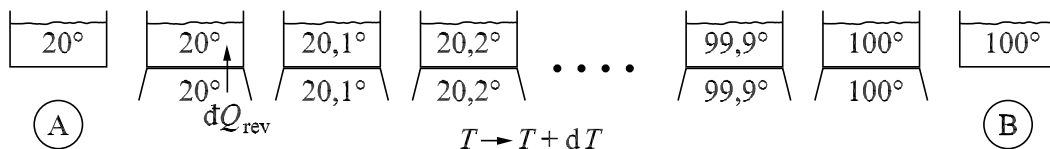
a. Entrinns oppvarming.



i) Varmeplata (reservoaret) gir fra seg varme ( $Q < 0$ ) ved konstant temperatur  $T_{\text{omg}}$ , da er entropiendringen  $\Delta S_{\text{omg}} = Q/T_{\text{omg}}$ . Vannmengdens varmekapasitet er  $C = C'_{\text{vann}} m = 4,19 \text{ kJ/K}$ . Varmen som kreves til å varme opp vannet er uavhengig av prosessen og lik  $C \Delta T = 4,19 \text{ kJ/K} \cdot 80 \text{ K} = 335 \text{ kJ}$ , slik at

$$\Delta S_{\text{omg}} = -335 \text{ kJ}/373 \text{ K} = -0,899 \text{ kJ/K} = \underline{-0,90 \text{ kJ/K}}.$$

ii) Prosessen er klart irreversibel. Varmen strømmer fra høy temperatur til lavere temperatur. Prosessen kan ikke brukes til å beregne entropiendringen  $dS = dQ/T$  i systemet. Men siden entropien er en tilstandsfunksjon er vannets entropi ved tilstand A og B uavhengig av prosessen mellom A og B. Vi bruker derfor en reversibel prosess for å beregne  $\Delta S$ , og tenker oss at varmen avgis fra et uendelig antall reservoar med temperaturer stigende infinitesimalt fra  $20^\circ\text{C}$  til  $100^\circ\text{C}$  (denne prosessen brukes også under pkt. c.):



Her er  $dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = \frac{C dT}{T}$ , slik at

$$\Delta S = S_B - S_A = C \int_A^B \frac{dT}{T} = C \cdot \ln \frac{T_B}{T_A} = 4,19 \text{ kJ/K} \cdot \ln \frac{373}{293} = 1,011 \text{ kJ/K} = \underline{1,01 \text{ kJ/K}}$$

iii)  $\Delta S_{\text{tot}} = (1,011 - 0,899) \text{ kJ/K} = \underline{0,11 \text{ kJ/K}}$

### b. Totrinns oppvarming.

i) Med henvisning til uttrykk for varme i a. i) blir omgivelsenes entropiendring lik:

$$\Delta S_{\text{omg}} = \frac{-C \cdot 30 \text{ K}}{323 \text{ K}} + \frac{-C \cdot 50 \text{ K}}{373 \text{ K}} = -(0,389 + 0,562) \text{ kJ/K} = -0,951 \text{ kJ/K} = \underline{-0,95 \text{ kJ/K}}$$

ii) Vannets entropiendring er fortsatt uavhengig av prosessen og lik  $\Delta S = 1,01 \text{ kJ/K}$ .

iii)  $\Delta S_{\text{tot}} = (1,011 - 0,951) \text{ kJ/K} = \underline{0,060 \text{ kJ/K}}$ . (Mindre sløsing med entropi, prosessen mindre irreversibel)

### c. $\infty$ -trinns oppvarming.

Denne prosessen er reversibel fordi all temperaturoverføring foregår over infinitesimal temperaturforskjell  $dT$ .

i) Også omgivelsens avgivelse av varme er nå reversibel, og vi kan beregne:  $dS_{\text{omg}} = \frac{-dQ_{\text{rev}}}{T}$ , og siden varme avgitt fra omgivelsene er motsatt lik varmen mottatt av vannet og dette ved samme temperatur, får vi:

$$\Delta S_{\text{omg}} = -\Delta S = -1,011 \text{ kJ/K} = \underline{-1,01 \text{ kJ/K}}$$

ii) Vannets entropiendring er fortsatt uavhengig av prosessen og lik  $\Delta S = 1,01 \text{ kJ/K}$ .

iii)  $\Delta S_{\text{tot}} = \underline{0,00 \text{ kJ/K}}$  (som det skal være når alle prosesser er reversible).

## Oppgave 4. Flervalgsoppgaver.

a. B. Midlere kinetiske energi er lik indre energi  $U$  som er lik  $n_f/2 \cdot k_B T$ . Når  $T$  dobles vil energien dobles, uavhengig av antall frihetsgrader  $n_f$  for gassen.

b. C.  $p_0 V_0^\gamma = \frac{1}{2} p_0 V^\gamma \Rightarrow V = V_0 2^{1/\gamma} = V_0 \cdot 2^{1/1,41} = V_0 \cdot 1,64$

c. B. Ideell gasslov gir  $V = nRT/p$  og  $V_0 = nRT_0/p_0$  og i oppgitt  $S(T, V)$  erstatter vi da  $V/V_0 = T/T_0 \cdot p_0/p$  og har kvittet oss med volumet. Vi bruker også at for ideell gass er  $C_V + R = C_p$ :

$$\begin{aligned} S &= nC_V \ln(T/T_0) + nR \ln(V/V_0) + S_0 \\ &= nC_V \ln(T/T_0) + nR \ln(T/T_0) + nR \ln(p_0/p) + S_0 \\ &= nC_p \ln(T/T_0) - nR \ln(p/p_0) + S_0 \end{aligned}$$

d. D. Her kan vi neglisjere endringer i volumet og dermed bruke  $dS = C dT/T$ :

$$\Delta S_{\text{vann}} = C \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T} = C \ln(T_1/T_0).$$

e. A. Varmereservoaret har (uendelig) stor varmekapasitet, slik at temperaturen ikke endres selv om varme fjernes eller tilføres. Varmen som ble tilført vannet i oppgave 2 er  $Q = C(T_1 - T_0)$ , positiv hvis  $T_1$  er større enn  $T_0$  og vice versa. Dette må da, pga energibevarelse, være varmen som varmereservoaret avgir, ved den konstante temperaturen  $T_1$ . Dermed:

$$\Delta S_{\text{res}} = -Q/T_1 = C(T_0 - T_1)/T_1.$$

f. A. Prosessen er en naturlig, spontan prosess, som dermed er irreversibel. Da *vet* vi at den totale entropiendringen er *positiv* – 2. hovedsetning.

Det er kanskje ikke umiddelbart innlysende at

$$\Delta S_{\text{tot}} = C \ln(T_1/T_0) + C(T_0 - T_1)/T_1$$

alltid er en positiv størrelse (evt. null dersom  $T_0 = T_1$ , dvs. likevekt mellom vann og reservoar i utgangspunktet), men hvis vi innfører  $x = (T_0 - T_1)/T_1 = T_0/T_1 - 1$ , har vi

$$\Delta S_{\text{tot}} = C[x - \ln(1 + x)],$$

og  $x$  er alltid større enn  $\ln(1 + x)$  (lik når  $x = 0$ ).

**g. A.** Effektfaktoren til Carnot-varmepumpa er

$$\eta_V^c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\dot{Q}_2|}{|\dot{W}|} \stackrel{\text{Carnot}}{=} \frac{T_2}{T_2 - T_1} = \frac{303}{40} = 7,58,$$

så den forbruker

$$|\dot{W}| = \frac{|\dot{Q}_2|}{\eta_V^c} = \frac{2,0 \text{ kW}}{7,58} = 0,26 \text{ kW}.$$

**h. D.** En Carnot-prosess består av to isotermer og to isentropiske prosesser, dvs. med hhv.  $T$  konstant og  $S$  konstant. Dermed et rektangel i et  $(S, T)$ -diagram.