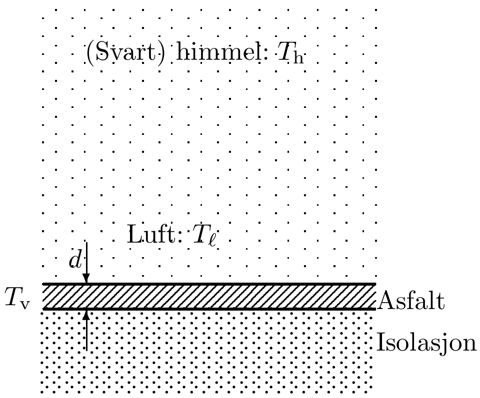
TFY4115 Fysikk (MTELSYS/MTTK/MTNANO)
Løsningsforslag for øving 13



Oppgave 1.

a. Når vi velger fortegnkonvensjonen slik at stråling *inn* mot veibanen er positiv, får de forskjellige bidragene til varmestrømtettheten formen

1. Stråling fra himmelen: $j_1 = \sigma T_{\rm h}^4$
2. Refleksjon fra veibanen: $j_2 = -r\sigma T_{\rm h}^4$
3. Utstråling fra veibanen: $j_3 = -e\sigma T_{\rm v}^4$
4. Varmeovergang mellom luft og veibane: $j_4 = \alpha(T_l - T_{\rm v})$.

Ved stasjonære forhold må $\Sigma_{n=1}^4 j_n = 0$. Med $e = a = 1 - r$ får vi vist det vi skulle:

$$\begin{aligned} \sigma T_{\rm h}^4[1-(1-e)] - e\sigma T_{\rm v}^4 + \alpha(T_\ell - T_{\rm v}) &= 0, \\ e\sigma(T_{\rm v}^4 - T_{\rm h}^4) &= \alpha(T_\ell - T_{\rm v})\,. \qquad (1) \end{aligned}$$

b. Med $T_{\rm v}^4 - T_{\rm h}^4 \approx 4T_{\rm m}^3 \cdot (T_{\rm v} - T_{\rm h})$ (se Tips til øvingen) blir løsningen av likn. (1)

$$T_{\rm v} = \frac{\alpha T_\ell + 4e\sigma T_{\rm m}^3 \cdot T_{\rm h}}{\alpha + 4e\sigma T_{\rm m}^3} = \frac{6,0\,{\rm W/(m^2K)} \cdot 275\,{\rm K} + 4 \cdot 0,8 \cdot \sigma \cdot (266\,{\rm K})^3 \cdot 260\,{\rm K}}{6,0\,{\rm W/(m^2K)} + 4 \cdot 0,8 \cdot \sigma \cdot (266\,{\rm K})^3} = 269,6\,{\rm K} = \underline{-3,6^\circ\,{\rm C}}\,. \qquad (2)$$

c. Dersom vanndamptrykket ved asfaltoverflata overstiger $p_{\rm metning}(-3,6\,^\circ{\rm C})$ (asfaltens temperatur), vil det rime på asfalten. Vanndampen helt inntil asfaltflata kan derfor maksimalt ha trykk $p_{\rm metning}(-3,6\,^\circ{\rm C}) = 4{,}53$ hPa. Her har vi interpolert lineært mellom de oppgitte verdier for metningstrykket ved -4° C og -3° C. Lufta med temp. $+2,0\,^\circ$C har metningstrykk 7,06 hPa, slik at kriteriet for ising blir

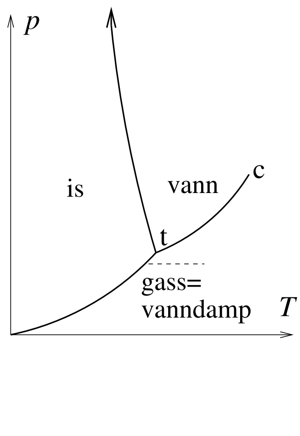
$$\phi > \frac{p_{H_20}(\text{aktuell})}{p_{\rm metning}} = \frac{p_{\rm metning}(-3,6\,^\circ{\rm C})}{p_{\rm metning}(2,0\,^\circ{\rm C})} = \frac{4,53}{7,06} = \underline{64\%}.$$

Lufta med temp. $+2,0\,^\circ$C har metningstrykk 7,06 hPa. Men allerede ved vanndamptrykk 4,53 hPa vil det ise på vegbanen. Det betyr at det blir ising ved relativ funktighet i lufta større enn

$$\phi = \frac{4,53}{7,06} = \underline{64\%}.$$

Her følger litt mer teori om vanndamp, for dem som ønsker:
Når lufta $(N_2, O_2, H_2O, CO_2, ...)$ kan regnes som en ideell gass, er trykket i denne gassblandingen gitt som

$$p = \frac{N}{V} \cdot k_B T = \left(\frac{N_{\rm N_2}}{V} + \frac{N_{\rm O_2}}{V} + \frac{N_{\rm H_2O}}{V} + \frac{N_{\rm CO_2}}{V} + ...\right) \cdot k_B T.$$



H_2O-komponenten i luftblandingen lever sitt eget liv, uavhengig av resten, og vi kan finne svar på våre spørsmål ved å studere fasediagrammet til reint H_20.

Deler av koeksistens-kurvene vanndamp/is og vanndamp/vann er tabulert i oppgaven. Kurvene er skissert i figuren, og gir det såkalte *metningstrykket* for vanndamp. Overstiger partialtrykket til vanndamp metningstrykket ved en gitt temperatur, kondenseres henholdsvis is eller vann. Tilsvarende, hvis partialtrykket er gitt, og temperaturen synker langs figurens stiplete linje, vil is kondenseres ut når denne linjen krysser koeksistenslinjen vanndamp/is, mens vann kondenseres ut dersom en tilsvarende stiplet linje krysser koeksistenslinjen *over* trippelpunktet t.

Oppgave 2.

a. I en endimensonal modell kan vi tenkte oss at platene er av uendelig stor utstrekning. Da vil all strålingseffekt som sendes ut fra en side av en plate treffe plata ved siden, uansett hva avstanden i mellom de to platene er. (Derfor er denne avstanden heller ikke oppgitt i oppgaven.)

b. Vi gjør som vi får beskjed om og konstruerer vektoren $\vec{x}$. Denne blir

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \\ \vdots \\ T_n^4 \end{bmatrix}.$$

Da ser vi, som vi har lært/lærer i Matematikk 3, at vi kan skrive likningssystemet vårt som et matriseproblem

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} T_I^4 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ T_Y^4 \end{bmatrix}.$$

Her identifiserer vi lett $n \times n$-matrisa som $\overset{\Rightarrow}{\boldsymbol{S}}$ og konstantvektoren til høyre for likhetstegnet som $\vec{b}$. Vi ser at $\overset{\Rightarrow}{\boldsymbol{S}}$ kun har elementer som er forskjellig fra null på diagonalen, på første sub- og første superdiagonal. En slik matrise kalles tridiagonal. En stor andel av elementene i $\overset{\Rightarrow}{\boldsymbol{S}}$ er dermed null. En matrise der en stor andel av elementene er null kalles også en glissen (engelsk "*sparse*") matrise.

c. Ved stasjonær løsning er temperaturen til hver plate konstant i tid. Da må varmestrømmen inn til hver plate være lik varmestrømmen ut av hver plate. I motsatt fall ville varmen kunne hope seg opp noen steder og da ville temperaturen der øke. Av samme grunn må netto varmestrøm mellom to plater være den samme, uansett hvilke to plater vi velger å se på. Denne netto varmestrømmen vil være lik den totale varmestrømmen gjennom hele veggen. Varmestrømtettheten utover fra siste plate n er $e\sigma T_n^4$ og varmestrømtettheten innover fra ytterplata er $e\sigma T_Y^4$. Da blir netto varmestrømtetthet utover mellom de to siste platene

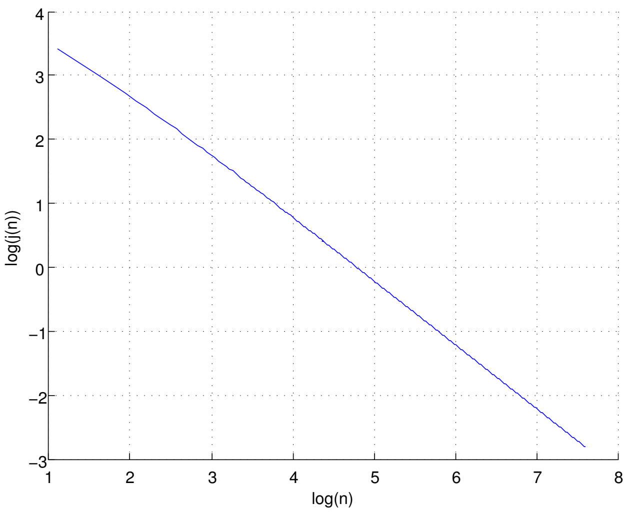
$$j = e\sigma \left(T_n^4 - T_Y^4 \right). \tag{3}$$

d. Det er mange måter å løse denne oppgaven på. En av dem er å ta utgangspunkt i likningen $j(n) = Cn^N$ og ta logaritmen på hver side av denne. Da får vi

$$\ln j(n) = \ln C + N \ln n.$$

Da ser vi at hvis vi plotter $\ln j(n)$ mot $\ln n$ skal vi få noe som går mot en rett linje med stigningstall N for store n. Med $T_I = 290$ K, $T_Y = 265$ K og for $3 \leq n \leq 2000$ får vi plottet til høyre.

Her kan vi lese av at stigningstallet går mot -1 for store n og dermed er $N \approx -1$.



Den fysiske tolkingen av dette er at jo flere plater vi putter inn, jo mindre varme strømmer gjennom veggen. Dette er kanskje ikke så overraskende. Siden $j(n) \propto 1/n$, ser vi at om vi dobler antall plater i veggen, halverer vi varmestrømmen gjennom den. Nedgangen i varmestrøm per innsatt plate er derfor mye større når det er få plater i veggen fra før enn når det er mange.

Oppgave 4. Flervalgsoppgaver.

a. B. Vi ser f.eks. at amplituden er redusert til 0,2 m etter 5 hele perioder, dvs. $e^{-5\gamma T} = 0,2$. Vi ser også at 4 hele perioder er praktisk talt 25 sekunder, dvs. $T \approx 25\,\mathrm{s}/4$. Dermed: $-5\gamma \cdot 25\,\mathrm{s}/4 = \ln 0,2 = -\ln 5$, dvs.

$$\gamma = (4 \ln 5)/(125\,\mathrm{s}) \approx 0,05\,1/\mathrm{s}.$$

b. D. $W = p_0 V_0 = 8 \cdot 1,01 \cdot 10^5\,\mathrm{N/m^2} \cdot 7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3} = 5,7$ kJ.

c. D. Med ideell gass er produktet pV konstant for en isoterm prosess. Dermed er $p_\mathrm{b}V_\mathrm{b} = p_\mathrm{c}V_\mathrm{c}$, slik at $V_\mathrm{c} = 5p_0V_0/2p_0 = 2,5V_0 = 20$ l.

d. B. Arbeidet W tilsvarer arealet innenfor kurven abcdea. Har i oppgaven over funnet at $V_\mathrm{c}/V_\mathrm{b} = p_\mathrm{b}/p_\mathrm{c} = 5p_0/2p_0 = 2,5$. Under isotermen bc er arbeidet

$$W_\mathrm{bc} = \int_{V_0}^{V_\mathrm{c}} p(V)\mathrm{d}V = nRT_\mathrm{b} \ln \frac{V_\mathrm{c}}{V_\mathrm{b}} = p_\mathrm{b}V_\mathrm{b} \ln \frac{p_\mathrm{b}}{p_\mathrm{c}} = 5p_0V_0 \ln 2,5$$

Med volumer som i figuren der altså $V_\mathrm{c} = 2,5 \cdot V_0$, beregnes totalt arbeid ved å legge til/trekke fra areal av rektangler:

$W = W_\mathrm{bc} + (2p_0 - p_0)(6V_0 - V_\mathrm{c}) - p_0 \cdot (V_\mathrm{c} - V_0) = 5p_0V_0 \ln 2,5 + p_0 \cdot 3,5V_0 - p_0 \cdot 1,5V_0 = p_0V_0 \cdot (5 \ln 2,5 + 2) = p_0V_0 \cdot 6,58.$

Med $p_0V_0 = 3\,\mathrm{atm} \cdot 8\,\mathrm{l} = 24 \cdot 101 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N/m^2} \cdot \mathrm{m^3} = 2424\,\mathrm{J}$ blir svaret 15,95 kJ = <u>16 kJ</u>.

e. C. Total utstråling $P = \dot{Q} = A \cdot \sigma T^4$ hvor A er stjerneoverflata; $A = 4\pi R^2$. Løst mhp. R:

$$\underline{R} = \sqrt{\frac{P}{4\pi\sigma T^4}} = \sqrt{\frac{3,9 \cdot 10^{30}\,\mathrm{W}}{4\pi \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2 \cdot K^4)} \cdot (3000\,\mathrm{K})^4}} = 2,60 \cdot 10^{11}\,\mathrm{km} = \underline{374\, R_\odot}.$$

f. E. Varmestrømmen er proporsjonal med differansen mellom temperaturen på den varme og den kalde siden. Om temperaturen dobles på den varme siden sier dette ikke noe om differansen siden temperaturen på den kalde siden ikke er oppgitt. Øker, men økningen kan ikke bestemmes.

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 17. okt. 17.