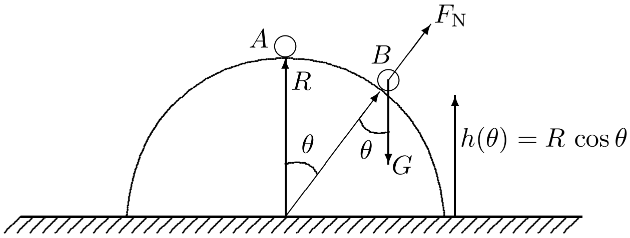
TFY4115 Fysikk (MTELSYS/MTTK/MTNANO)
Løsningsforslag for ekstraøving

Oppgave 1.



a. Energibevarelse for posisjon A og B gir:

$$
\begin{aligned}
E_A &= E_B \\
E_{p,A} + E_{k,A} &= E_{p,B} + E_{k,B} \\
mgR + 0 &= mgR\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2 \\
v(\theta) &= \underline{\sqrt{2gR(1-\cos\theta)}} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

b. De kreftene som virker på mannen i posisjon B er tyngden G og normalkrafta F_N, som vist i figuren. Newtons 2. lov i radiell retning gir idet hastigheten fra likn. (1) settes inn:

$$
\begin{aligned}
G\cos\theta - F_N &= \frac{mv^2}{R} && (2) \\
F_N &= mg\cos\theta - \frac{m}{R}2gR(1-\cos\theta) \\
F_N &= \underline{mg(3\cos\theta - 2)} && (3)
\end{aligned}
$$

Brettkjøreren vil lette fra underlaget når $F_N(\theta_0) = 0$, fra likning (3):

$$mg(3\cos\theta_0 - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_0 = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = 48,2^\circ = \underline{48^\circ}\,,$$

og da er hastigheten fra likn. (1):

$$v(\theta_0) = \sqrt{2gR\left(1-\frac{2}{3}\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}\cdot 9,81\cdot 50}\ \mathrm{m/s} = 18,1\ \mathrm{m/s} = \underline{65\ \mathrm{km/h}}\,.$$

c. Mye hjelp er gitt i øvingstips og fullstendig Matlabscript er gitt på nettsida for øvinger. Her gis derfor bare noen korte kommentarer samt utskrift (grafer neste side),

Uttrykk for normalkrafta har vi fra likn. (2): $F_N = g\cos\theta - \omega^2 R$. Vi må for hver iterasjon teste om $F_N > 0$ og vi tester vi også på `nmax` for å hindre en uendelig løkke, som er lett å ende opp i hvis det er noe feil i programmet. Test på $\theta < \pi/2$ er unødvendig hvis testen på F_N fungerer.

Resultatet av utskriften til skjermen når friksjonen er null (med `theta` i grader og `omega` i grader/s):

```
theta(1)= 0.57 dt=0.010 nmax=10000
FN=0 når n=1164 t=11.63 theta=48.19 omega=20.72 v=18.09
```

Vinkelen og farten stemmer med hva funnet i b.: $\theta_0 = 48,2^\circ$ og $v_0 = v(\theta_0) = 18{,}1$ m/s.

Oppgave 2.

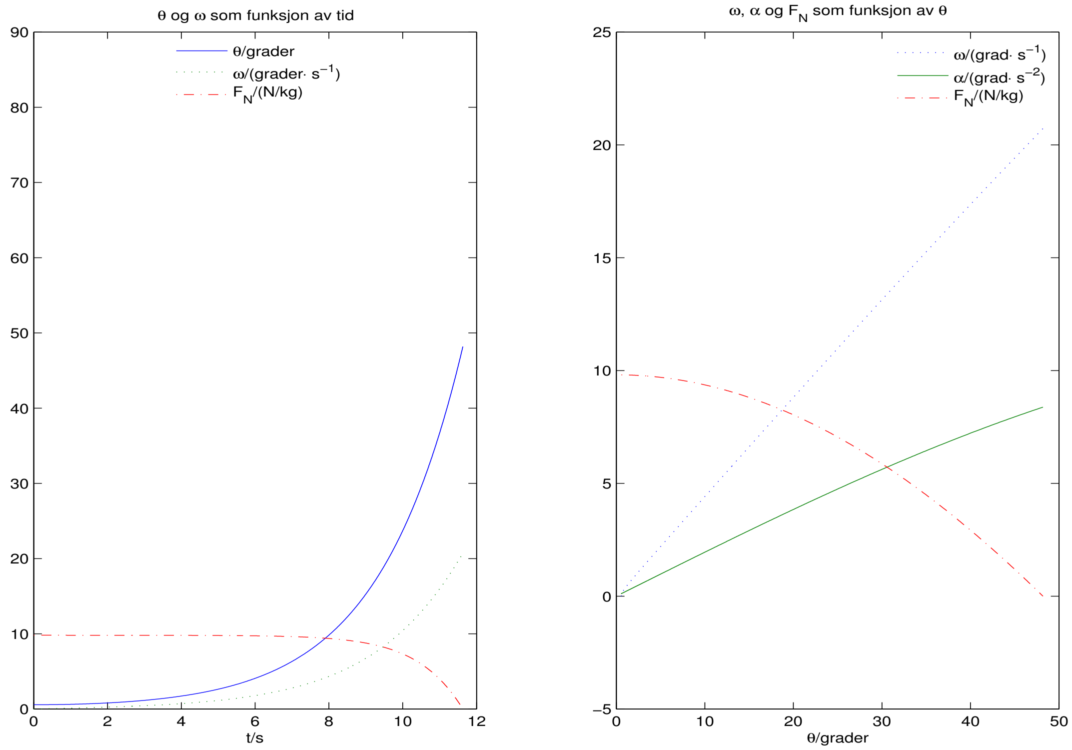
a. Som oppgitt i øvingstips blir vinkelakselerasjonen med friksjon μF_N:

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{g\sin\theta - \mu F_N/m}{R}\,. \qquad (4)$$

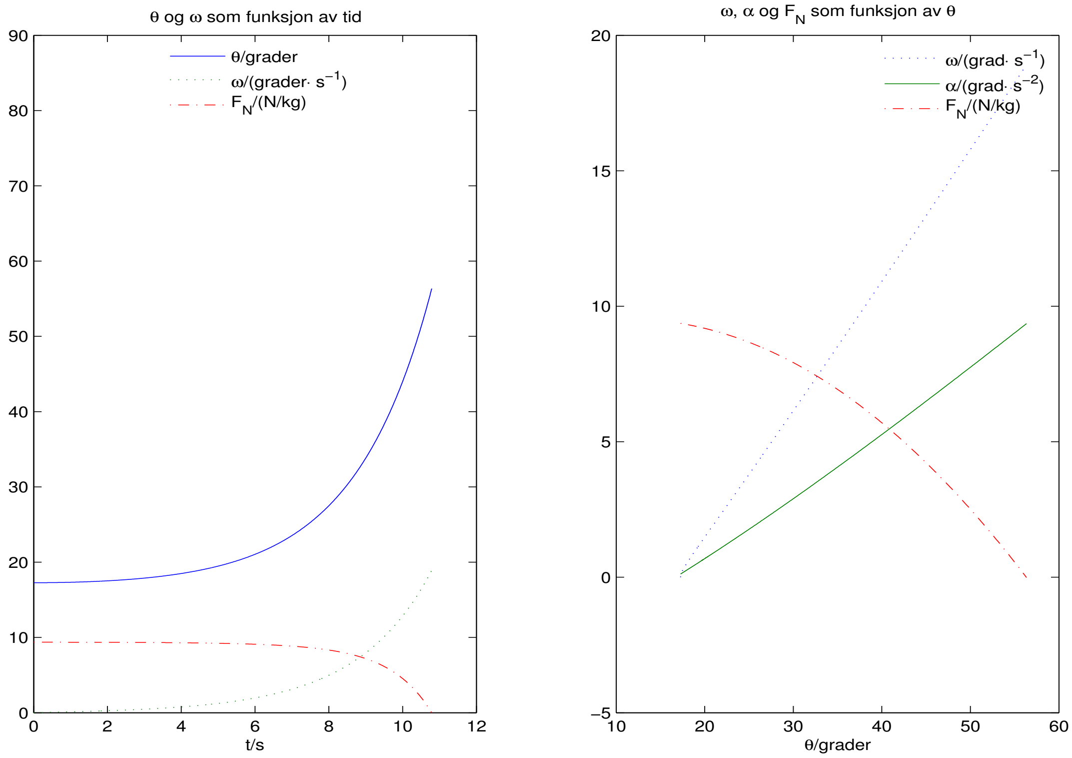
Ellers er programmet som i oppgave 1.

Matlab-resultater med figurer for $\mu = 0,0$ (oppgave 1c) og $\mu = 0,3$ er vist på neste side.

```
my=0.00  theta(1)= 0.57 dt=0.010 nmax=10000
FN=0 når n=1164 t=11.63 theta=48.19 omega=20.72 v=18.09
```




```
my=0.30  theta(1)=17.27 dt=0.010 nmax=10000
FN=0 når n=1080 t=10.79 theta=56.35 omega=18.91 v=16.50
```



b. Nå må friksjonsarbeidet inngå i energibevarelsen, og friksjonsarbeidet ved en forflytning $\mathrm{d}\theta$ er

$$\mathrm{d}W_\mathrm{f} = \vec{F}_\mathrm{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\mu F_\mathrm{N} \cdot R\,\mathrm{d}\theta = -\mu\left(mg\cos\theta - mv^2/R\right) \cdot R\,\mathrm{d}\theta\,,$$

der normalkrafta $F_\mathrm{N} = mg\cos\theta - mv^2/R$ er fra likn. (2). Endring i pot.en. er $\mathrm{d}E_\mathrm{p} = \mathrm{d}(mgh)$ der høyden er $h = R\cos\theta$ slik at høydeforskjell ved forflytning $\mathrm{d}\theta$ blir $\mathrm{d}h = -R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$. Energibalansen kan da settes opp:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(mgh) + \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= \mathrm{d}W_\mathrm{f} \\
mg\,\mathrm{d}h + mv\,\mathrm{d}v &= -\mu\left(mg\cos\theta - mv^2/R\right) \cdot R\,\mathrm{d}\theta \\
g\left(-R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right) + v\,\mathrm{d}v &= \left(-\mu gR\cos\theta + \mu v^2\right)\,\mathrm{d}\theta \\
v\,\mathrm{d}v &= \left(gR\sin\theta - \mu gR\cos\theta + \mu v^2\right)\,\mathrm{d}\theta\,. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Diff.likningen (5) er vanskelig å separere i de to avhengig variable v og θ og må løses med å multiplisere med integrerende faktor. Løsning er ikke nødvendig i dette fysikkemnet, men har du bakgrunnen fra matematikk er det bare å sette i gang. Her: `http://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/tfy4145/diverse/FriksjonKuleFuglstad.pdf` finner du en løsning av fys.mat.-studenter, som løser diff.likningen ved å bruke integrerende faktor $e^{-2\mu\theta}$ og viser at ved $\mu = 0,30$ letter arbeideren fra underlaget ved $56,3°$, som stemmer med simuleringen i a.

Da en positiv $\mathrm{d}\theta$ nødvendigvis må gi en økning i fart, dvs. positiv $\mathrm{d}v$, må må sette som krav

$$gR\sin\theta - \mu gR\cos\theta + \mu v^2 \geq 0\,.$$

I starten når v er liten kan vi se bort fra siste ledd, og vi får

$$gR\sin\theta \geq \mu gR\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \tan\theta \geq \mu\,,$$

som er kravet til at kroppen i det hele tatt skal gli. Med $\mu = 0,30$ skjer dette først når $\theta_0 = \arctan 0,30 = 17°$. Så arbeideren har altså litt å redde seg på! Differensiallikningen (5) forutsetter at arbeideren sklir, slik at likningen ikke gjelder før denne vinkelen θ_0 er overskredet.

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 8. sep. 17.