

## TFY4145/FY1001 Mekanisk fysikk

- Størrelser og enheter (Kap 1)
  - Kinematikk i en, to og tre dimensjoner (Kap. 2+3)
    - Posisjon, hastighet, akselerasjon. Sirkelbevegelse.
  - Dynamikk (krefter): Newtons lover (Kap. 4)
  - Anvendelse av Newtons lover (Kap. 5)
    - bl.a. kraftdiagram, friksjon, snorkrefter, luftmotstand.
  - Arbeid, energi, energibevaring (Kap. 6+7)
  - **Lineær bevegelsesmengde, kollisjoner (Kap. 8)**
  - Rotasjon, spinn, bevaring av spinn (Kap. 9+10)
  - Statisk likevekt (Kap. 11)
  - Gravitasjonsloven (Kap. 13)
  - Svingninger (Kap. 14)
- Eksperimentelle arbeidsmetoder (laboratorium).

## Kap. 8

Bevegelsesmengde. Kollisjoner. Massesenter.

### Vi skal se på:

- Newtons 2. lov på ny: Definisjon bevegelsesmengde
- Kraftstøt, impuls. Impulsloven
- Kollisjoner:
  - Elastisk, uelastisk, fullstendig uelastisk
- Massesenter (tyngdepunkt)
- Rakettilikningen (variabel masse).

## Kap. 8

Bevegelsesmengde. Kollisjoner. Massesenter

- Bevegelsesmengde:  $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$
- Opprinnelig form Newton 2:  $\mathbf{F} = d\mathbf{p} / dt$
- Kraftstøt =  $\mathbf{J} = \int \mathbf{F} dt = \Delta\mathbf{p}$  (impulsloven)
- Ingen ytre krefter =>  $\mathbf{p}_{\text{tot}} = \text{konstant}$ 
  - Kraftstøt motsatt like stort på hvert legeme
- Kollisjoner:
  - Elastisk, uelastisk, fullstendig uelastisk
  - Ikke-sentralt støt (Ex. 8.12 i Y&F)
- Massesenter (Y&F 8.5)
- Newtons lov for massesenter:  $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = m \mathbf{a}_{\text{cm}}$
- Ikke konstant masse: Rakettilikningen (Y&F 8.6)

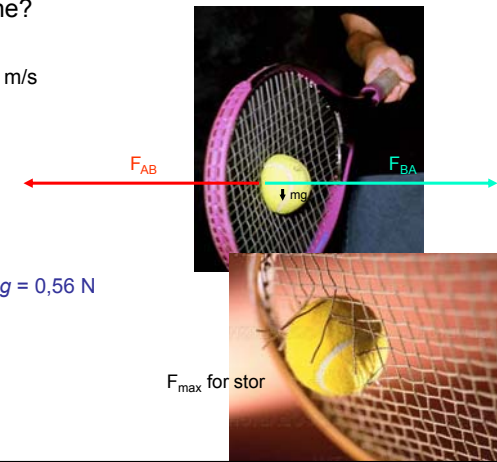
## Kollisjoner skjer så raskt at vi kan se bort fra ytre krefter under kollisjonen

Hvor store er kreftene?

$m = 56 \text{ g}$   
 $v = 50 \text{ m/s} \rightarrow v = -50 \text{ m/s}$   
 anta på  $t = 0,005 \text{ s}$

=> middelkraft fra N2:  
 $F_{\text{av}} = \Delta p / \Delta t = 1120 \text{ N}$   
 $F_{\text{max}} \approx 2000 \text{ N}$

Ytre kraft = tyngde =  $mg = 0,56 \text{ N}$   
 er forsvinnende liten



### To (tre) klasser kollisjoner (eksempel: kast mot golv)

The diagram illustrates three collision scenarios with a ball of mass  $m_1$  and a surface of mass  $m_2$ :

- E (Elastisk):** The ball bounces back with the same speed.  $v_2 = v_2' = 0$ .
- «Normalt»:** The ball bounces back with a different speed.  $v_2 = v_2' = 0$ .
- U (Fullstendig uelastisk):** The ball sticks to the surface.  $v_1' = v_2' = v'$ .

Alle kollisjoner:  $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$  (100)

### Fullstendig uelastisk med $m_2 \gg m_1$ og $v_2 = 0$ (vegg)

$v' = 0$   
 $p$  bevart ??

Ja:  
 $m_2 v_2 = 0$     $m_1 v_1' = 0$   
 $m_1 v_1 = m_2 v_2' = \infty \cdot 0$   
 (bakken/jorda uendelig masse)

Alle kollisjoner:  ~~$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$~~  (100)

### Elastisk støt:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (100)$$

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \quad (101E)$$

Gir  $v_2' - v_1' = -(v_2 - v_1) \quad (104)$   
 Relativhastigheter reverseres!  
[www.plu.ntnu.no/skolelab/fysikk-animasjoner/](http://www.plu.ntnu.no/skolelab/fysikk-animasjoner/)

Muligheter:

Krav for støt:

$$v_2 - v_1 < 0$$

### Sentralt elastisk støt

$v_1, v_2$  = fart før støt  
 $v_1', v_2'$  = fart etter støt

Generell løsning:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (104)$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad (105)$$

### Så langt om kollisjoner:

- Kraftstøt =  $J = \int F dt = \Delta p$  (impulsloven)
- Antar ingen ytre krefter i selve kollisjonen  
=> Bevegelsesmengde er bevart:

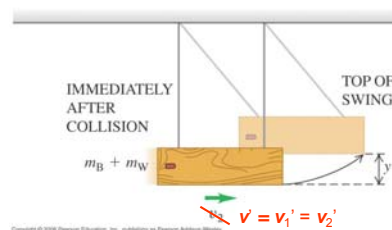
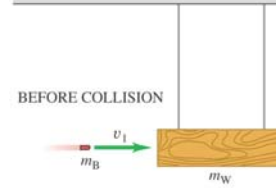
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (100)$$

#### Tilleggslikninger:

- Elastisk støt: Kinetisk energi bevart:  
 $m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v'^2_1 + m_2 v'^2_2$  (101E)
- Uelastisk støt (ingen spes. likninger)
- Fullstendig uelastisk støt: Felles slutfart:  
 $v'_2 = v'_1$  (101U)

Y&F: Ex. 8.8, L&L Eks. 5.3:

### Fullstendig uelastisk støt "Ballistisk pendel":



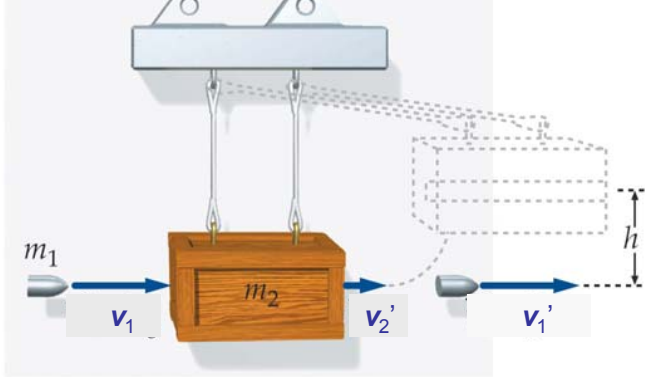
Kjente:  
 $m_B, m_W$  og oppsving  $y$   
To ukjente:  
 $v_1$  og fellesfarten  $v = v'_1 = v'_2$   
To likninger:  
Bevaring  $p$  under støtet (1)  
energibevarelse under oppsving (2)

$$m_B v_1 + m_W \cdot 0 = (m_B + m_W) v' \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} (m_B + m_W) v'^2 = (m_B + m_W) g y \quad (2)$$

OBS uelastisk:  
 $\frac{1}{2} m_B v_1^2 + \frac{1}{2} m_W \cdot 0^2 \neq \frac{1}{2} (m_B + m_W) v'^2$

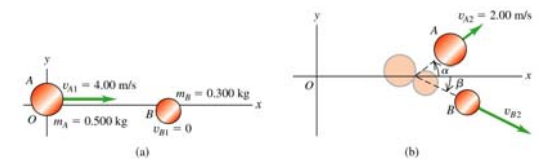
### Delvis uelastisk støt



Tre ukjente: Før støt:  $v_1$ . Etter støt:  $v_1'$  og  $v_2'$   
To likninger: Impulsbevarelse **under** støtet og energibevarelse i oppsving.  
Tilleggsopplysning: **F.eks.** oppgitt kulas fart etter støtet:  $v_1' = \frac{1}{2} v_1$   
(evt. kunne tap i energi være oppgitt)

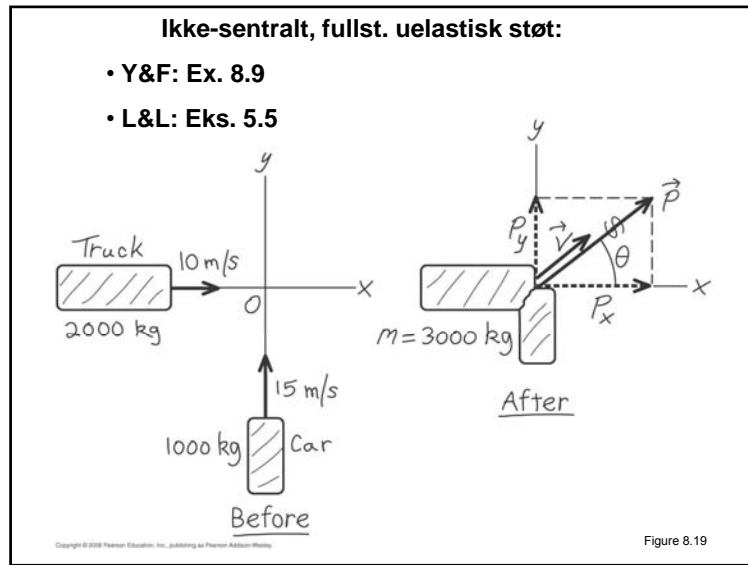
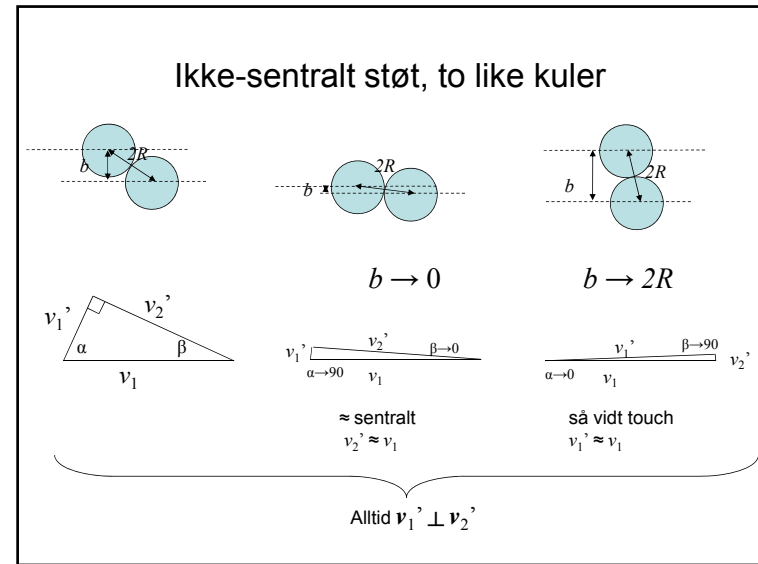
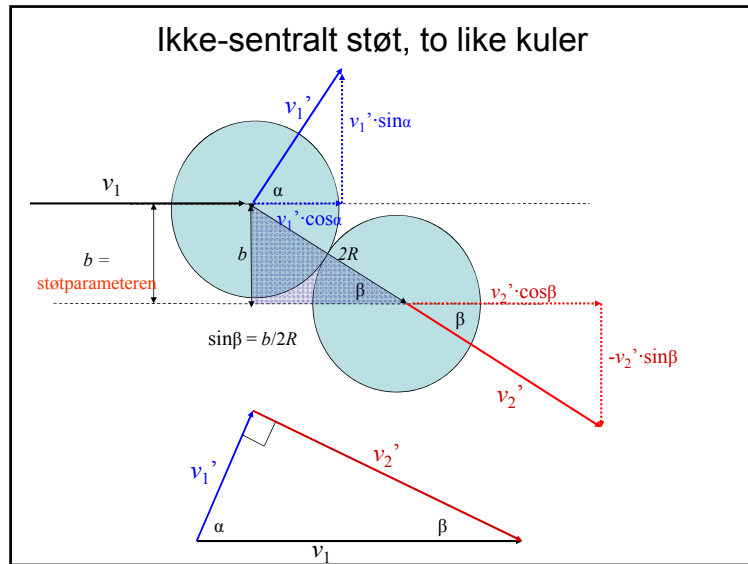
### Ikke-sentralt støt

- Kollisjon skjer ikke langs éi linje



Hvis kule B ikke i ro før støt:  
Legg inn koord.system som følger kule B før støtet.

- (Y&F Ex. 8.12)
- Lien og Løvhøiden: s. 119
- Simulering: <http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/index.php?topic=4.0>



### Massesenter

- **Punktpartikkel:** all masse i ett punkt
- **Flerpartikkelsystem:**  
Legeme =  $\sum$  punktpartikler  
(nødvendig mhp. rotasjon, bøyning, deformasjon)
- **Massesenter  $r_{cm}$ :**

• Topartikkelsyst.       $\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$

• N-partikkelsyst.       $\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$       (8.29)

• Kontinuerlig       $\vec{r}_{cm} = \frac{\int_{legeme} \vec{r} \cdot dm}{\int_{legeme} dm} = \frac{1}{M} \int_{legeme} \vec{r} \cdot dm$       (ikke i Y&F LL: Kap. 6.1)

- **Tyngdepunkt = massesenter**  
dersom tyngdeaksel.  $g$  er lik over hele legemet

**Eks. Massesenter, kontinuerlig massefordeling**

**Eks. 1. Halvsirkel (1-dimensjonal)**

$dm = \lambda ds$   
 $[\lambda] = \text{kg} / \text{m}$

$x = r \cos \theta$   
 $dm = \lambda ds = \lambda r d\theta$   
 $y = r \sin \theta$   
 $y_{cm} = r \frac{2}{\pi} = 0,64 r$   
 $x_{cm} = 0$

**Eks. 2. Halv sirkelplate: (2-dimensjonal)**

$dm = \sigma dA$   
 $[\sigma] = \text{kg} / \text{m}^2$

$y_{cm} = r \frac{4}{3\pi} = 0,42 r$   
 $x_{cm} = 0$

**Eks. Massesenter, kontinuerlig massefordeling**

**Eks. 3. Rett kjege (3-dimensjonal) LL, Eks. 6.1)**

$dm = \rho dV$   
 $[\rho] = \text{kg} / \text{m}^3$

$r = R(1 - z/H)$   
 $dV = \pi r^2 dz$   
 $z_{cm} = H/4$

**Massesenter**

- Topartikkelsystem  $\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$
- N-partikkelsystem  $\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$  (8.29)
- Kontinuerlig  $\vec{r}_{cm} = \frac{\int_{legeme} \vec{r} \cdot dm}{\int_{legeme} dm} = \frac{1}{M} \int_{legeme} \vec{r} \cdot dm$  (8.29B)

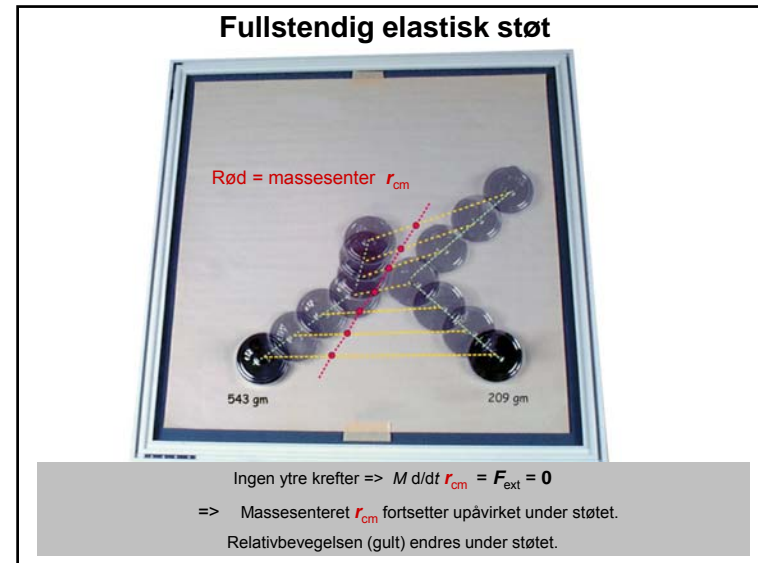
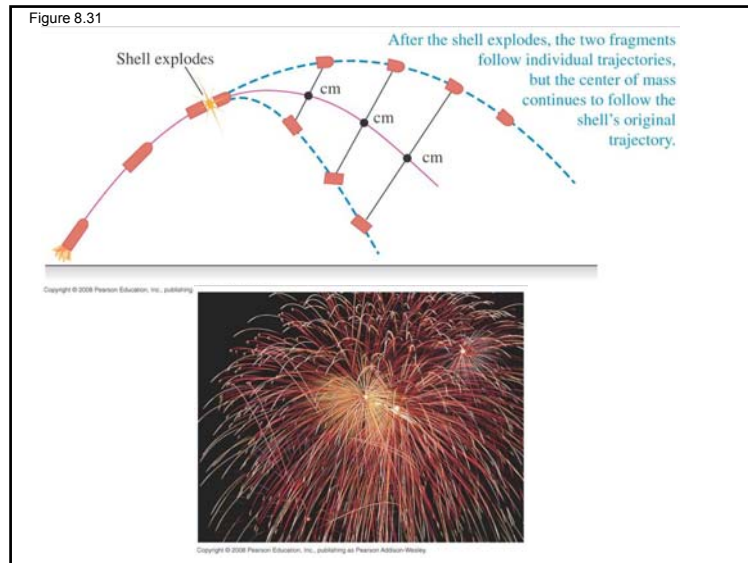
1-dim: Integrasjon langs linje:  $dm = \lambda ds$ . Eks:

2-dim: Integrasjon over plan:  $dm = \sigma dA$ . Eks:

3-dim: Integrasjon over volum:  $dm = \rho dV$ . Eks:

**Kap. 8. Massesenter**

- *Tyngdepunkt = massesenter*  
dersom tyngdeaksel.  $g$  er lik over hele legemet
- Newtons lov for massesenter:  $\sum \mathbf{F}_{ext} = m \mathbf{a}_{cm}$



**Oppgave:**  
 Ei kule skytes inn i en trekloss som farer opp i lufta (fullst. uelastisk støt).  
 Kula treffer ved A, B eller C.  
 Hvilket treff løfter treklossen til størst høyde  $h$ ?

**Svar:**  
 Like høyt for alle.  
 Bevegelsesmengde bevart:  
 Alltid samme fart for klossen:

$$mv = (M+m)V_{cm}$$

I tillegg kommer rotasjon ved B og C (mest ved C)

Demonstrert og forklart på YouTube:  
[www.youtube.com/watch?v=BLYoyLcdGPC&list=UJHnyMoiRRG1u-2MsSQLbXA](http://www.youtube.com/watch?v=BLYoyLcdGPC&list=UJHnyMoiRRG1u-2MsSQLbXA)

Kule med høy fart  $v$


## Kap. 8. Massecenter

- *Tyngdepunkt = massecenter*  
 dersom tyngdeaksel.  $g$  er lik over hele legemet
- Newtons lov for massecenter:  $\sum F_{ext} = m a_{cm}$
- Tyngdens pot. en:  $E_p = gM z_{cm}$

### Variabel masse Rakettlikningen

YF: 8.6  
LL: 5.4

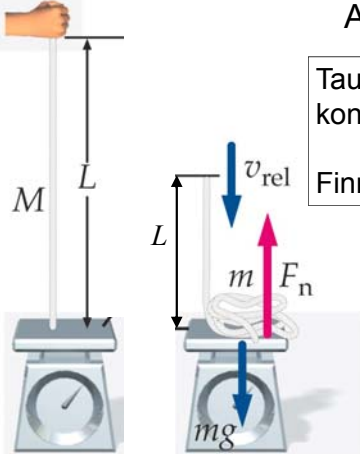
Andre eksempler:  
Sand på vogn/transportband:  
L&L Opg. 5.26.



Øving 5. Kasse på transportband (se også Y&F opg 8.111)

### Variabel masse. Andre eksempler

Tauet føres ned med konstant fart  $v_{rel}$ .  
Finn  $F_n$  s.f.a taulengde  $L$



### Kap. 8. Oppsummert

#### Bevegelsesmengde. Kollisjoner. Massesenter.

- Bevegelsesmengde:  $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$
- Opprinnelig form Newton 2:  $\mathbf{F} = d\mathbf{p} / dt$
- Kraftstøt =  $\mathbf{J} = \int \mathbf{F} dt = \Delta \mathbf{p}$  (impulsloven)
- Antar ingen ytre krefter (i bevegelsesretning) under støt:
  - Bevegelsesmengde  $\mathbf{p}_{tot}$  er bevart
  - Tilleggslikninger:
    - Elastisk støt: Kinetisk energi bevart
    - Fullstendig uelastisk støt: Felles slutfart. (Energi avtar)
    - Uelastisk støt: Ingen generell tilleggslikning. (Energi avtar)
- For ikke-sentrale støt (2-dim) bestemmer støtparameteren vinkler
- Massesenter  $\mathbf{r}_{cm} = \int \mathbf{r} dm / M$ .
- Newtons lov for massesenter:  $\sum \mathbf{F}_Y = m \mathbf{a}_{cm}$
- Tyngdens pot. en. for massesenter:  $E_p = gM z_{cm}$
- Ikke konst. masse: rakettlikningen:  $\mathbf{F}_Y + \mathbf{u}_{ex} dm/dt = m d\mathbf{v}/dt$

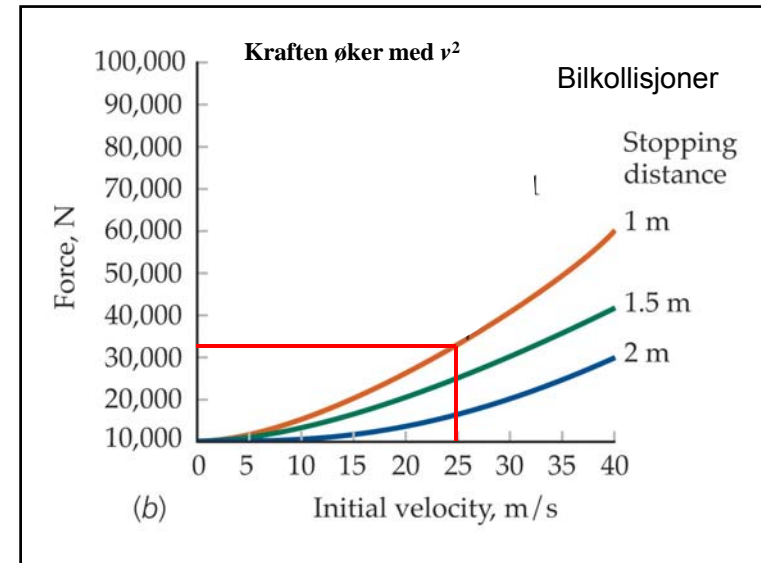
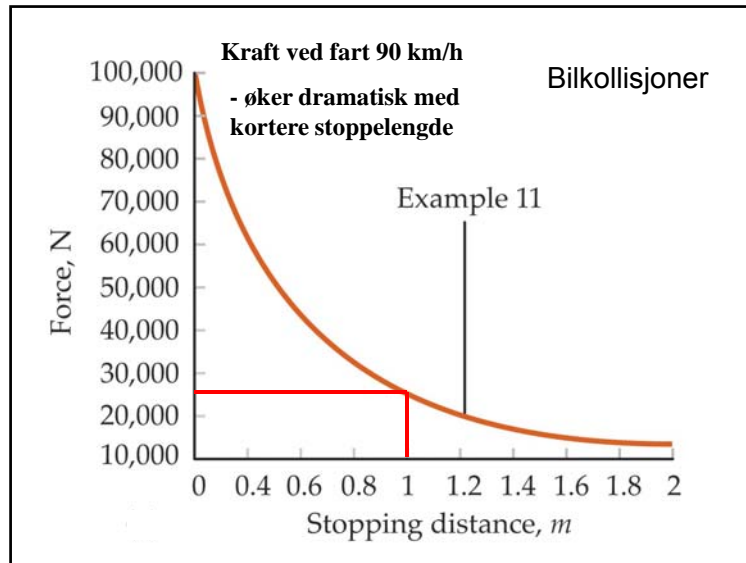
### Kap 8. Oppsummert: Massesenter

- **Punktpartikkel:** all masse i ett punkt
- **Flerpartikkelsystem:**  
Legeme =  $\sum$  punktpartikler  
(nødvendig mhp. rotasjon, bøyning, deformasjon)
- **Massesenter  $\mathbf{r}_{cm}$ :**
- Topartikkelsyst.  $\mathbf{r}_{cm} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2)$
- N-partikkelsyst.  $\mathbf{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i$  (8.29)
- Kontinuerlig  $\mathbf{r}_{cm} = \frac{\int_{legeme} \mathbf{r} \cdot dm}{\int_{legeme} dm} = \frac{1}{M} \int_{legeme} \mathbf{r} \cdot dm$  (8.29B)
- **Tyngdepunkt = massesenter** dersom  $\mathbf{g}$  er lik over hele legemet

1-dim: Integrasjon langs linje:  $dm = \lambda ds$ .

2-dim: Integrasjon over plan:  $dm = \sigma dA$ .

3-dim: Integrasjon over volum:  $dm = \rho dV$ .



### Kritiske akselerasjoner ved kollisjoner

Hjernen mest følsom.

Avhengig av akselerasjonen (antall  $g$ ) og tida den virker:

- 150 x  $g$  i få ms: Dødelig
- 50 x  $g$ : 20-30 ms kan tåles.
- "Severity index" =  $I = \int (a/g)^{5/2} dt$

$$I = 1000 \text{ s gir } 50/50 \text{ sjanse overleve}$$

90 km/t  $\rightarrow$  0 :

på 1,0 m (80 ms):  $I = 460 \text{ s}$

på 0,25 m (20 ms):  $I = 3700 \text{ s}$

Essensielt å stoppe over lengst mulig tid og distanse.

f.eks. deformerbart frontparti.

.... Men også viktig for myk stopp:

- sikkerhetsbelte
  - kollisjonsputer
- (ingen skarpe kanter  $\Rightarrow$  lite trykk)