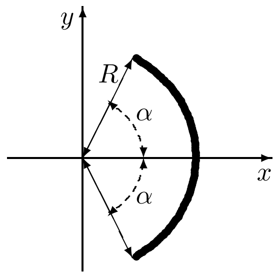
Institutt for fysikk 2013

TFY4145/FY1001 Mekanisk fysikk
Øving 7

Veiledning: Tirsdag 15 okt. og onsdag 16. okt., se nettsider.
Innlevering: Torsdag 17. okt. kl. 14:00.



Oppgave 1. Massefellespunkt.

a. En tynn, jamntykk, bøyle er en del av en sirkel og har sektorvinkel 2α, som vist i figuren. Sirkelradiusen er R. Vis at massefellespunktets posisjon i forhold til sirkelens sentrum er gitt ved:

$$x_{\mathrm{cm}} = R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Hva blir resultatet for $\alpha = \pi$, $\alpha = \pi/2$ og $\alpha \to 0$? Er svarene rimelige?

b. Ekstraoppgave:.
Bøylen erstattes av en sirkelsektor med samme åpningsvinkel 2α og radius R. Sirkelsektoren har jamn tykkelse. Vis at massefellespunktets posisjon i forhold til sirkelens sentrum er gitt ved:

$$x_{\mathrm{cm}} = \frac{2}{3}R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Hva blir resultatet for $\alpha = \pi$, $\alpha = \pi/2$ og $\alpha \to 0$? Er svarene rimelige?

Oppgave 2. Rakettlikningen.

En rakett skytes vertikalt oppover nær jordoverflata slik at tyngdeakselerasjonen er konstant lik g. Forbrenningsgassene fra rakettmotoren blåses ut bakover med en hastighet u_{ex} i forhold til raketten. Definer positiv retning oppover ($\hat{k}$).

a. Bruk "rakettlikningen" til å vise at dersom raketten starter fra ro, blir hastigheten

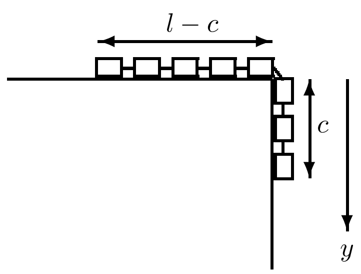
$$v(t) = u_{\mathrm{ex}} \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) - gt\,,$$

der t er tida motoren brenner, og m_0 og m er rakettens start- og sluttmasse.

b. For denne raketten har vi at $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -R$ som vi antar konstant. Vis at rakettens akselerasjon kan skrives som

$$a(t) = \frac{u_{\mathrm{ex}} R}{m_0 - Rt} - g\,.$$

Oppgave 3. Kjede over bordkant.

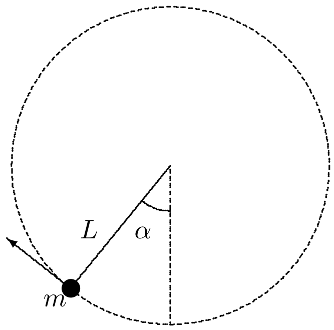


En kjede med svært mange og små ledd henger utover en bordkant. Kjedens totale lengde er l, massen er m og en lengde y henger til enhver tid utenfor bordkanten. Kjeden holdes initielt i ro med en lengde $y = c$ utenfor bordkanten. Så slippes den og begynner å gli med hastighet $v(y)$. Antall ledd er mye større enn antydet i figuren, slik at du kan regne bitene for infinitesimale og lenken som kontinuerlig.

Vi antar at det ikke er friksjon mellom kjeden og den horisontale bordflaten. Bestem hastigheten $v(l)$ til kjeden idet siste ledd glir over bordkanten. TIPS: Diff.likning i v og y fra N2 med $\dot{v} = \mathrm{d}v/\mathrm{d}y \cdot v$. Alternativ: Energibevarelse. Sistnevnte metode er nok enklest, men prøv gjerne begge to.

(flere oppgaver neste side)

Oppgave 4. Matematisk pendel.



Ei lita kule med masse m festa i ei snor utgjør en matematisk pendel. I figuren svinger kula på en del av en vertikal sirkel som i figuren ligger i papirplanet. Hvis vi erstatter snora med ei vektløs stang vil kula hele tiden følge sirkelbanen med radius L selv om kula beveger seg på øvre halvdel med liten fart (vil ikke gå over i et skrått kast).

a. Vis at kulas bevegelse er bestemt ved likningen

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}\sin\alpha = 0. \tag{1}$$

Tips: N2 tangentielt til sirkelbanen, og sammenhengen mellom kulas hastighet og α.

Likn. (1) kan, såvidt jeg vet, ikke løses analytisk. (Det er mulig å finne et analytisk uttrykk for svingeperioden T, men bare med betydelig strev.) Numerisk er det imidlertid ingen problemer. Den enkleste og mest intuitive numeriske måten å bestemme $\alpha(t)$ på er den såkalte **Euler-metoden**. N2 kan skrives på formen

$$\mathrm{d}v = \frac{F}{m}\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Det betyr at hastigheten ved tidspunktet $t + \mathrm{d}t$ kan bestemmes dersom vi kjenner hastigheten ved tidspunktet t:

$$v(t + \mathrm{d}t) = v(t) + \mathrm{d}v = v(t) + \frac{F}{m}\,\mathrm{d}t.$$

Med et *endelig* tidssteg Δt blir likningen

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \Delta v = v(t) + \frac{F(t)}{m}\,\Delta t$$

bare tilnærmet riktig, men formodentlig en riktig *god* tilnærmelse dersom Δt velges tilstrekkelig liten.

Samme oppskrift kan vi bruke i neste omgang for å bestemme posisjonen, eller som her, vinkelen $\alpha(t)$. Vi har $v = \mathrm{d}l/\mathrm{d}t = L\,\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$, dvs.

$$\mathrm{d}\alpha = \frac{v}{L}\,\mathrm{d}t,$$

og med endelig tidssteg gir dette

$$\alpha(t + \Delta t) = \alpha(t) + \Delta\alpha = \alpha(t) + \frac{v(t)}{L}\,\Delta t.$$

Hvis vi nå, som her, kjenner $\alpha(t = 0)$ og $v(t = 0)$, for eksempel $\alpha(0) = 0$ og $v(0) = v_0$, kan likningene over brukes til å finne $\alpha(\Delta t)$ og $v(\Delta t)$, deretter $\alpha(2\Delta t)$ og $v(2\Delta t)$ osv. I vårt konkrete tilfelle er det tyngdens tangentialkomponent som bestemmer akselerasjonen, og dermed hastigheten tangentielt,

$$\frac{F}{m} = -g\sin\alpha.$$

b. I MATLAB-programmet `pendel_matematisk.m` er denne oppskriften implementert. Programmet plotter pendelposisjonen $\alpha(t)$. Kjør programmet med ulike verdier av starthastigheten v_0 (dvs. $v(1)$ i programmet). Maksimalt vinkelutslag er bestemt av energibevarelse, og ved $\frac{1}{2}mv_0^2 = mg2L$ blir maksimalt vinkelutslag 180°. Dette toppunktet er en ustabil likevekt, sjekk dette med ulike tidsstep `dt`.

Fra plottene, avles maksimalt vinkelutslag $\alpha_{\max}$ og perioden T for noen ulike starthastigheter v_0. Lag et plot av $T(\alpha_{\max})$.

c. Vis at mekanisk energi (per masseenhet), $E/m = (E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p})/m$, er bevart, ved å legge til i MATLAB-programmet utregning av E/m og plotte den som funksjon av t.

Utvalgte fasitsvar: 2a: $u_\mathrm{ex}\ln\left(\frac{m_0}{m}\right) - gt$, 2b: $\frac{u_\mathrm{ex}R}{m_0 - Rt} - g$; 3: $v = \sqrt{\frac{g}{l}(l^2 - c^2)}$;