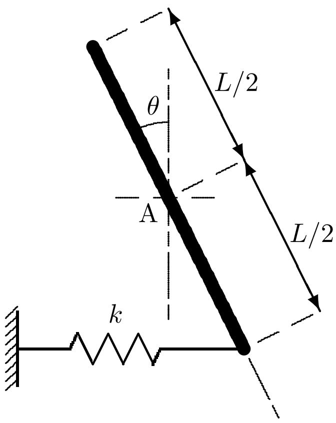
TFY4145/FY1001 Mekanisk fysikk
Øving 13

Veiledning: Tirsdag 26. nov. og onsdag 27. nov., se nettsider.
Innlevering: Torsdag 28. nov. kl. 14:00.

Oppgave 1. Fjærdreven pendelbevegelse.



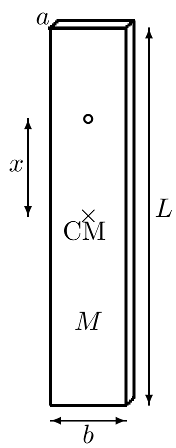
En tynn, uniform stav med masse M og lengde L kan rotere uten friksjon om en akse normalt på staven gjennom stavens midtpunkt A. Stavens nederste ende er festet til ei horisontal fjær med fjærkonstant k (fjærkraft $F = -kx$). Systemet er i likevekt når staven står vertikalt. Staven vris en liten vinkel θ (sterkt overdrevet på figuren) og slippes.

a. Vis at vinkelen $\theta(t)$ oppfyller likningen for en harmonisk oscillator, med periode $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{3k}}$.

b. Hvorfor var det ikke nødvendig å ta hensyn til tyngdekrafta i punkt **a** ?

TIPS: Spinnsatsen. Anta treghetsmoment for staven som kjent. For liten vinkel kan du approksimere $\sin\theta \approx \theta$ og $\cos\theta \approx 1$. I praksis betyr dette bl.a. å se bort fra vertikalforflytningen av enden av staven.

Oppgave 2. Svingende trefjøl.



Den svingende trefjøla vist på forelesning har masse M, lengde $L = 942$ mm, bredde $b = 53$ mm, tykkelse $a = 8,0$ mm, og hull i ulike avstander x fra tyngdepunktet (CM) midt på fjøla, se tabell nedenfor. I tabellen er det også angitt målte svingetider $T_{\text{exp}}(x)$ når fjøla svinger om en akse gjennom hullet i posisjon x. (For den ene lange svingetida er usikkerheten forholdsvis stor, siden svingebevegelsen ble raskt dempet ned.)

x/mm	$T_{\text{exp}}(x)$/s	$T(x)$/s
15	4,0	...
153	1,54	...
272	1,46	...
428	1,56	...

TIPS: Kapittel 5 i labheftet kan være til hjelp i denne oppgaven.

a. Fjølas treghetsmoment mhp. en akse normalt på fjøla gjennom CM er

$$I_0 = \frac{1}{12}M(L^2 + b^2). \tag{1}$$

Bruk Steiners sats og finn et uttrykk for $I(x)$, dvs. fjølas treghetsmoment mhp. en akse normalt på fjøla i avstand x fra CM (se figur).

b. Finn et uttrykk for fjølas svingeperiode $T(x)$ når den kan svinge friksjonsfritt omkring en akse i avstand x fra CM. (Bruk formelark eller resultat fra oppgave 4 i øving 12.)

c. Sjekk at svaret i b er fornuftig for spesialtilfellene $T(x \gg L)$ og $T(x \ll L)$.

d. Regn ut tallverdier for $T(x)$ for verdier av x gitt i tabellen ovenfor og sammenlign med de målte verdiene.

e. Ekstraoppgave: Beregn hvilken verdi av x som gjør svingetida $T(x)$ minimal. (Tips: $\mathrm{d}(T^2)/\mathrm{d}x$.) Lag en skisse av $T(x)$, bruk gjerne MATLAB.

f. Ekstraoppgave: Vis formel (1) ovenfor.

Oppgave 3. Resonans og halvverdibredde.

Som presentert i forelesning og Notat 3 har en endimensjonal dempet harmonisk oscillator som drives med en ytre kraft $F_0 \cos \omega t$ bevegelseslikning

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t,$$

der $\omega_0^2 = k/m$, $2\gamma = b/m$ og $f_0 = F_0/m$. Utsvinget er da

$$x(t) = A_0(\omega)\cos(\omega t - \delta(\omega)),$$

med frekvensavhengig amplitude og fase

$$A_0(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \qquad \tan\delta(\omega) = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

a. Dersom oscillatoren drives på resonans, dvs. med $\omega = \omega_0$, blir fasekonstanten $\delta(\omega_0) = \pi/2$, slik at utsvinget blir

$$x(t) = A_0(\omega)\cos(\omega t - \pi/2) = A_0(\omega)\sin \omega t.$$

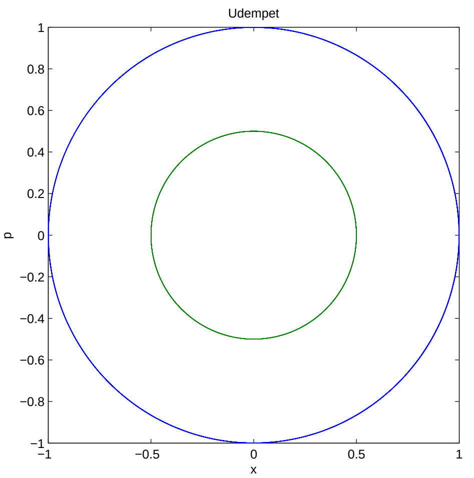
Vis at det oppgitte uttrykket for amplituden A_0 i dette tilfellet stemmer med bevegelseslikningen.
TIPS: Regn ut hastighet og akselerasjon og sett inn i bevegelseslikningen.

b. På forelesning slo vi ganske enkelt fast at for svak demping, dvs. $\gamma \ll \omega_0$, er resonanstoppens halvverdibredde[1] $\Delta\omega = 2\gamma$. Halvverdibredden defineres som differansen $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, der $A_0^2(\omega_1) = A_0^2(\omega_2) = A_{0,\max}^2/2$.

Vis at dette stemmer ved å regne ut A_0^2 for $\omega = \omega_0$, $\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega/2 = \omega_0 - \gamma$ og $\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega/2 = \omega_0 + \gamma$.
TIPS: Utnytt opplysningen om svak demping, samt at utsvinget er maksimalt nettopp på resonans.

c. Bruk MATLAB til å plotte $A_0^2(\omega)$ for en svakt dempet oscillator med masse 0,100 kg, fjærkonstant 1000 N/m og dempingskonstant $b = 0,200$ Ns/m. Bruk f.eks. kraftamplitude $F_0 = 20,0$ N. Les av halvverdibredden $\Delta\omega$ fra figuren og sammenlign med den "teoretiske" verdien 2γ.

Oppgave 4. Faseplott for endimensjonal harmonisk oscillator.



Hvis vi tegner opp posisjon x og bevegelsesmengde p for en oscillator i samme diagram, får vi et såkalt *faseplott*. Generelt kaller man rommet med en akse for hver komponent av posisjon og bevegelsesmengde for et *faserom*, på engelsk *phase space*. Et punkt i faserommet representerer da oscillatorens mekaniske *tilstand*, gitt ved posisjon $\vec{r}$ og bevegelsesmengde $\vec{p}$, eller, som her, i en dimensjon x og p.
Hvis vi regner dimensjonsløst og setter oscillatorens masse $m = 1$, fjærkonstanten $k = 1$ og amplituden $A = 1$, blir likningen for tilfellet uten demping

$$\ddot{x} + x = 0,$$

med løsning

$$x(t) = \sin t \quad ; \quad p(t) = \dot{x}(t) = \cos t,$$

og kurven for (x, p) blir den blå (dvs. den største) sirkelen i figuren til venstre. Den grønne sirkelen (den minste) viser (x, p) med amplitude $A = 1/2$.

Figuren er laget i Matlab med programmet `faseplott_eks.m`, som er lagt ut på øvingssida. Etter hvert som tida går (variabelen `tid` i programmet), følger oscillatoren (evt. massen eller partikkelen) den aktuelle kurven i faserommet, her med klokka, slik at ett omløp tar tida lik en periode T. Her er $T = 2\pi$.

Hvis vi inkluderer en dempingskraft $-b\dot{x}$, blir bevegelseslikningen som presentert i forelesning

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2}$$

der $\gamma \equiv b/2m$ og $\omega_0^2 \equiv k/m$.

En løsning med *underkritisk* demping, $\gamma < \omega_0$, er

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\sin \omega t, \quad \text{der} \quad \omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \tag{3}$$

En løsning med *overkritisk* demping, $\gamma > \omega_0$, er

$$x(t) = A^+ \mathrm{e}^{-\alpha^{(+)}t} + A^- \mathrm{e}^{-\alpha^{(-)}t} \text{ der } \alpha^{(\pm)} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{4}$$

[1]Engelsk: FWHM = Full Width at Half Maximum.

eller uttrykt med $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cosh\beta t, \quad \text{der} \quad \beta \equiv \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \tag{5}$$

Uttrykket (5) er enklere å hanskes med enn (4) og MATLAB har sjølvsagt funksjonen cosh. I uttrykkene (3) og (5) har vi antatt visse initialbetingelser slik at den ene integrasjonskonstanten er fastlagt. Betingelsene som gir disse løsningene er for (3): $x(0) = 0, \dot{x}(0) = A\omega$ og for (5): $x(0) = A, \dot{x}(0) = -A\gamma$.

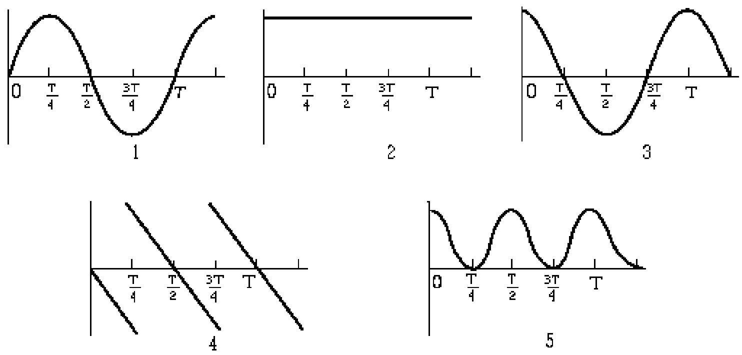
a. Sett massen $m = 1$, regn ut oscillatorens bevegelsesmengde $p = m\dot{x} \to \dot{x}$, og legg til de nødvendige linjene i Matlab-programmet `faseplott_eks.m` slik at programmet viser figurer med faseplott for de to tilfellene underkritisk og overkritisk demping. Velg selv tallverdier for A, γ og ω_0.

b. Ekstraoppgave: Vis ved direkte innsetting, at uttrykkene (3) og (5) *er* løsninger av bevegelseslikningen (2). Husk da at $\mathrm{d}(\cosh x)/\mathrm{d}x = \sinh x = \left[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right]$.

Oppgave 5. Flere ekstraoppgaver, flervalgsoppgaver:

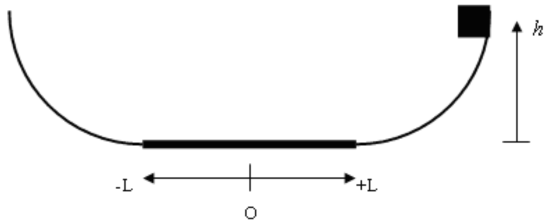
a. Den kinetiske energien til et legeme som beveger seg i en harmonisk oscillasjon er plottet som funksjon av tida som er gitt i enheter av perioden T. Ved $t = 0$ er utsvinget lik null. Hvilken graf representerer disse betingelser?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



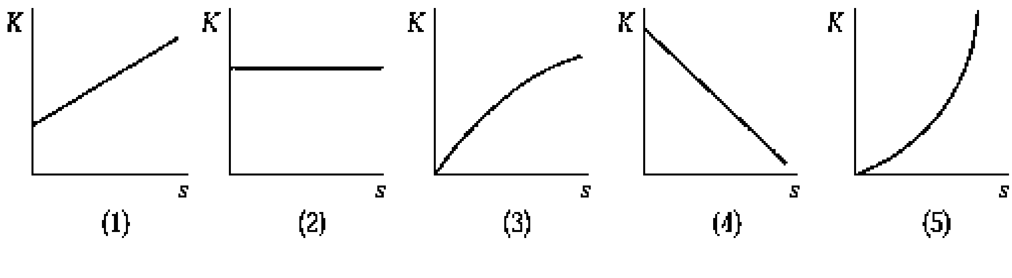
b. En kloss med masse m slippes fra høyde $h = 75$ cm på høyreenden av en bane som vist i figuren. Bevegelsen er friksjonsfri bortsett fra et område rundt midtpunktet O, og i dette området er den kinetiske friksjonskoeffisienten $\mu_\mathrm{k} = 0,40$. Dette området strekker seg over $L = 30$ cm på hver side av O, totalt 60 cm. Hvor høyt kommer klossen når den for **andre** gang passerer over til venstre side, og i hvilken retning (høyre eller venstre) beveger den seg like før den stopper?

A) 27 cm, høyre
B) 3,0 cm, høyre
C) 27 cm, venstre
D) 3,0 cm, venstre
E) 51 cm, høyre



c. En gjenstand i ro slippes fra stor høyde og faller gjennom lufta. Luftmotstanden gjør seg gjeldende, og da er forløpet som best representerer gjenstandens kinetiske energi, K, som funksjon av hvor langt den har falt, s, gitt ved kurve

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



SISTE ØVING – LYKKE TIL MED EKSAMEN!