

# Notat 4: Maxwells likninger (elmagen i et nøtteskall)

Læreboka (Young & Friedman = Y&F) presenterer kun Maxwells likninger på integralform (kap. 29.7 og 32.1), differensialformen utelates helt. I Lillestøl, Hunderi og Lien presenteres derimot begge former (oppsummert i kap. 28.1). Dere har god bakgrunn i vektoranalyse og differensiallikninger fra matematikken, derfor er det ingen grunn til å utelate differensialformen av likningene. Og Maxwells likninger på differensialform summerer hele innholdet i klassisk elektrodynamikk. Alle basissammenhenger er innebygget her, som Coulombs lov, Biot-Savarts lov og Faradays lov. A.Mikkelsen 4. mars 2010.

La oss ta utgangspunkt i Maxwells likninger på integralform som de er gitt i Y&F, likninger (29.18)-(29.21). **Disse gjelder i vakuum med permittivitet  $\epsilon_0$  og permeabilitet  $\mu_0$ :**

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (\text{Gauss' lov for } \vec{E}) \quad (1)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (\text{Gauss' lov for } \vec{B}) \quad (2)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \quad (\text{Amperes lov}) \quad (3)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \quad (\text{Faradays lov}). \quad (4)$$

Ved bruk av divergensteoremet og Stokes' teorem vil man kunne skrive (1)-(4) på differensialform:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (6)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (8)$$

Vi har da brukt definisjonene for henholdsvis fluksen til  $\vec{E}$ , fluksen til  $\vec{B}$  og strømtettheten  $\vec{J}$ :

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (9)$$

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (10)$$

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}. \quad (11)$$

Maxwells likninger beskriver hvordan felter produseres: Elektriske felt kommer enten fra ladninger – beskrevet av (1) eller (5), eller fra endring i magnetisk felt – beskrevet av (4) eller (8). Magnetiske felt kommer enten fra strømmer inkludert i første ledd i likn. (3) eller (7) eller fra endring i elektrisk felt, inkludert i siste ledd i likn. (3) eller (7). Likn. (2) eller (6) beskriver at det ikke finnes magnetiske “ladninger” (monopoler).

De eneste likningene vi trenger i tillegg er Lorentzkrafta

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (12)$$

som beskriver hvordan elektriske og magnetiske felt virker på ladninger, samt Ohms lov

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (13)$$

som beskriver hvor stor strøm det blir i et materiale med konduktivitet  $\sigma = 1/\rho$  ( $\rho$  er resistiviteten) når det er påtrykt et elektrisk felt  $\vec{E}$ .

Det er i Maxwells likninger en vakker symmetri mellom  $\vec{B}$  og  $\vec{E}$ , særlig når ladning og strøm er null, som vi vil se til slutt i dette notatet.

Maxwells likninger på formen (1)-(4) og (5)-(8) ovenfor er på ett vis rett også når vi ikke har vakuum. Men det forutsettes da at  $Q$  og  $\rho$  omfatter *total* ladning, dvs. fri + induert(bunden) ladning. Dette er uhenksommessig, og innenfor materialer (dielektriske og magnetiske) skrives derfor likningene på en annen måte med andre vektorfelt:

I dielektrika får vi elektrisk polarisering  $\vec{P}$ , som er forklart nærmere i Notat 1. Vi har der definert vektorfeltet

elektrisk flukstetthet  $\vec{D}$  (også kalt elektrisk forskyvning):

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (14)$$

Tilsvarende får vi i ferromagnetiske materialer magnetisk polarisering, kalt magnetisering  $\vec{M}$ , som forklart i Notat 2. Den magnetiske flukstetthet  $\vec{B}$  som vi har brukt i Maxwells likninger over inkluderer også magnetiseringen, og den delen av magnetfeltet som bare skyldes strømmer eller tidsendring i  $E$ -felt, kaller vi magnetisk feltstyrke,  $\vec{H}$ :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}. \quad (15)$$

I materialer som ikke har magnetisering er  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ .

**Maxwells likninger som gjelder i alle materialer** og uttrykt med vektorfeltene  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  og  $\vec{B}$  (som definert i likningene (14) og (15)) vil på integral- og differensialform lyde

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (16)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (17)$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (18)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (19)$$

der elektrisk fluks er

$$\Phi = \int \vec{D} \cdot d\vec{A}. \quad (20)$$

Ulempen med likningene (16)-(19) er at vi har "hybrid" notasjon; vi må forholde oss til flere felter:  $\vec{E}$  og  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  og  $\vec{B}$ . De aller fleste media – og alle aktuelle i dette fysikkurset – er elektromagnetisk sett lineære og isotrope. Det betyr at polariseringen  $\vec{P}$  øker proporsjonalt (lineært) med  $\vec{E}$  og er parallell med denne, og at magnetiseringen  $\vec{M}$  øker proporsjonalt (lineært) med  $\vec{H}$  og er parallell med denne:

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}, \quad (21)$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}. \quad (22)$$

Da er (som også beskrevet i Notat 1 og 2):

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi_e \epsilon_0 \vec{E} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (23)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 \vec{H} + \chi_m \mu_0 \vec{H} = (1 + \chi_m) \mu_0 \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (24)$$

der definisjonen av relativ permittivitet  $\epsilon_r$  og relativ permeabilitet  $\mu_r$  framkommer.

Dermed har vi kun to vektorfelt å forholde oss til; f.eks. bare  $\vec{E}$  og  $\vec{B}$  mens  $\vec{D}$  og  $\vec{H}$  ikke inngår. Men før vi skriver dem opp, la oss også anta at vi har homogene medier, dvs. at  $\mu$  og  $\epsilon$  ikke varierer fra punkt til punkt.<sup>1</sup> Da kan disse settes utenfor integral-, derivasjons- og nablategn. For det første finner vi da fra likningene (9) og (20) at  $\Phi = \epsilon \cdot \Phi_E$ .

**For lineære, isotrope og homogene media** vil da likningene (16)-(19) forenkles til følgende Maxwells likninger:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (25)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (26)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu I + \mu \epsilon \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (27)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (28)$$

Ved sammenlikning ser vi nå at de første Maxwells likninger som gjelder for vakuum (1)-(8) er identisk med disse siste likningene, bare at  $\epsilon_0$  og  $\mu_0$  er erstatta av henholdsvis  $\epsilon$  og  $\mu$ !

<sup>1</sup>NB: For magnetiske materialer har vi ofte at  $\mu$  er homogen, men avhengig av magnetfeltet  $\vec{B}$ .

Hvis vi kun studerer **statisk tilfelle (ingen tidsvariasjon)** vil likningene (25)-(28) forenkles til

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \qquad (29)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (30)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu I \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J} \qquad (31)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \qquad (32)$$

Vi ser at  $\vec{B}$  og  $\vec{E}$  er fullstendig dekopla. Stasjonære ladninger bestemmer  $E$ -feltet (elektrostatikk) og stasjonær strøm bestemmer  $B$ -feltet (magnetostatikk).

Til slutt: Hvis vi tar med tidsvariasjoner men ser på **områder hvor vi ikke har ladninger eller strømmer** vil likningene (25)-(28) reduseres til følgende likninger<sup>2</sup>

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad (33)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (34)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu\epsilon \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (35)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \qquad (36)$$

Merk at vi her finner perfekt symmetri mellom  $\mu\epsilon \vec{E}$  og  $-\vec{B}$ ! Når enten et  $E$ -felt eller et  $B$ -felt endrer seg med tida blir det andre feltet induisert. Likningene (33)-(36) på differensialform er de likningene som beskriver elektromagnetiske bølger.

Symmetrien hadde vært fullkommen også i Maxwells likninger med ladning ( $\rho \neq 0$ ) dersom det fantes “magnetisk ladning” (magnetiske monopoler) – så en kan skjønne hvorfor fysikere i alle år har lett etter magnetiske monopoler!

Den vidtrekkende betydning og inntrykksfulle skjønnhet i Maxwells likninger fikk den store fysiker Boltzmann til å uttrykke “War es ein Gott der diese Zahlen schrieb.....”

---

<sup>2</sup>Ladnings- og strømfritt er mest aktuelt for vakuum, slik at vi kunne brukt  $\mu_0$  og  $\epsilon_0$ .