

# Øving 6

## Dipol. Platekondensatorer.

*Veiledning:* Torsdag 18. og fredag 19. feb. ifølge nettsider.

*Innlevering:* Tirsdag 23. feb. kl. 14:00

Lever øvinger i bokser utenfor R1.

### Oppgave 1 Potensial rundt dipol.

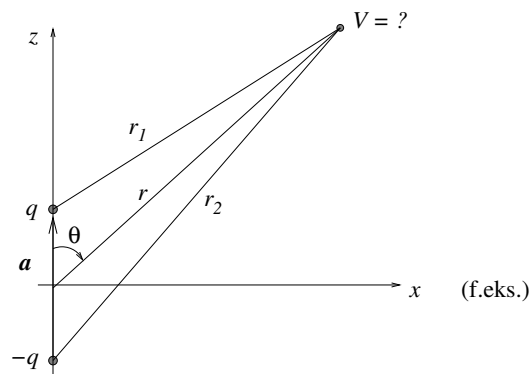
I en tidligere øving betraktet vi en elektrisk dipol, bestående av to punktladninger  $\pm q$  lokalisert på  $z$ -aksen i  $z = \pm a/2$ . Vi regnet ut det eksakte potensialet  $V_e(x, z)$  og fant

$$V_e(x, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z - a/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z + a/2)^2}} \right).$$

Deretter viste vi at potensialet i stor avstand fra dipolen ( $r \gg a$ ) blir tilnærmet lik (indeks  $a$  for "approximately")

$$V_a(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cos \theta}{r^2}.$$

Her er  $r$  avstanden fra origo, dvs dipolens midtpunkt, og  $\theta$  er vinkelen mellom  $z$ -aksen og  $\vec{r}$ . (Dipolmomentet er  $p = qa$ .)



Vi skal visualisere dipolpotensialet og sammenligne det tilnærmede uttrykket  $V_a$  med det eksakte uttrykket  $V_e$ . Dette kan vi gjøre ved å skrive et program i Octave (eller MatLab) som regner ut differansen – eller kanskje like gjerne det prosentvise avviket  $\Delta = 100 \cdot |(V_e - V_a)/V_e|$  mellom det eksakte og det tilnærmede uttrykket gitt ovenfor – og som plottes  $V_e(x, z)$ ,  $V_a(x, z)$  og "feilen"  $\Delta(x, z)$  i tre forskjellige figurer.

NOEN TIPS OG KOMMENTARER:

- Skriv først om  $V_a(r, \theta)$  (i kulekoordinater) til  $V_a(x, z)$  (kartesiske koordinater).
- Det er mulig å plote potensialene i SI-enhet (V) som funksjon av  $x$  og  $z$  i en passende enhet. Men det er generelt mye mer praktisk å plote dimensjonsløse størrelser som funksjon av dimensjonsløse koordinater. Vi plottes slik *essensen* i de aktuelle funksjonene. Vil sterkt anbefale å lære dette, og her er et forslag til hvordan dette kan gjøres:

Uttrykkene inneholder lengdeskalaen  $a$ , slik at det er naturlig å innføre de dimensjonsløse koordinater

$$\xi = x/a, \quad \eta = z/a.$$

Uttrykkene inneholder også ladningen  $q$  og  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , slik at det er naturlig å bruke potensial relativt til potensialet

$V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$  = potensial i avstand  $a$  fra en punktladning  $q$ . De dimensjonsløse potensial blir da

$$v_e = \frac{V_e}{V_0} = V_e \cdot \frac{4\pi\epsilon_0 a}{q}, \quad v_a = \frac{V_a}{V_0} = V_a \cdot \frac{4\pi\epsilon_0 a}{q}.$$

Dette gir de dimensjonsløse uttrykk  $v_e(\xi, \eta)$  og  $v_a(\xi, \eta)$  som du selv enkelt kan bestemme.

- Finn et fornuftig område i  $(x, z)$ -planet for plottene dine, f.eks.  $-2 < \xi < 2$  og  $-2 < \eta < 2$ .
- Det kan være lurt å begrense også "funksjonsaksen" i plottene dine, da potensialet blåser opp i nærheten av ladningene.
- Noen kommandoer og funksjoner som du kan få bruk for: `meshgrid` (el. `linspace`), `mesh`, `axis`, `caxis`, `figure`, `xlabel`, `ylabel`, `zlabel`. Let opp dokumentasjon for hjelp til å bruke disse. (F.eks. google "gnu octave manual" eller "mathworks matlab manual".)
- Det viktigste poenget med denne oppgaven er å få litt trening i å bruke programmering i tilknytning til det å jobbe med fysikk. Du vil få flere anledninger seinere.

Oppfordrer sterkt alle til å gjøre plottoppgaven ovenfor. Dersom du ikke kjenner Octave, Matlab eller andre passende plottprogram, kan du isteden velge å gjøre følgende oppgave 1B:

### Oppgave 1B Potensial rundt dipol.

a) Ta utgangspunkt i det tilnærmede uttrykket  $V_a(r, \theta)$  og bestem det elektriske feltet  $\vec{E}(r, \theta) = E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta}$  i stor avstand fra dipolen. Det oppgis at gradientoperatoren i kulekoordinater er

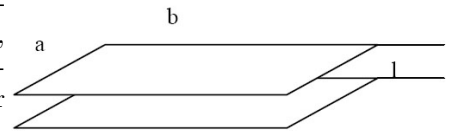
$$\vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

Kontroller om disse uttrykkene er fornuftige for  $\theta = 0$  og for  $\theta = \pi/2$ . Hva med  $r = 0$ ?

b) På grunn av rotasjonssymmetrien omkring  $z$ -aksen kan vi f.eks. anta at vi befinner oss i  $xz$ -planet. Bestem det elektriske feltet  $\vec{E}(x, z) = E_x \hat{x} + E_z \hat{z}$  uttrykt i kartesiske koordinater for  $r \gg a$ . Tips: Ta utgangspunkt i uttrykkene for  $E_r$  og  $E_\theta$  i punkt b). Tegn gjerne opp en figur og finn på den måten sammenhengen mellom koordinatene  $(x, z)$  og  $(r, \theta)$ , og feltkomponentene  $E_x, E_z$  og  $E_r, E_\theta$ .

### Oppgave 2 Platekondensator.

En parallellplatekondensator består av to rektangulære plater med sidekanter  $a = 10$  cm og  $b = 50$  cm. Avstanden mellom platene,  $\ell$ , kan varieres, og er i starten  $\ell = \ell_1 = 3,0$  mm og det er da luft mellom platene. Kondensatoren lades opp til en spenning  $V_1 = 300$  V. Vi antar at ladningen er uniformt fordelt på innsiden av platene og at vi kan se bort fra endeffekter.



- Hva er den elektriske feltstyrken  $E$  mellom kondensatorplatene?
- Hva er den elektriske feltstyrken utenfor (over og under) kondensatorplatene? Begrunn svaret!
- Hva er kondensatorens kapasitans  $C$ ?

Forbindelsen til spenningskilden brytes etter at kondensatoren er ladd. Avstanden mellom kondensatorplatene økes til  $\ell = \ell_2 = 6,0$  mm for akkurat å gi plass til en plate av dielektrisk materiale av samme tykkelse. Det dielektriske materialet fyller hele hulrommet mellom kondensatorplatene. Spenningen på kondensatoren måles nå til  $1/10$  (10%) av den opprinnelige spenningen.

- Bestem relativ permittivitet (dielektrisitetskonstant)  $\epsilon_r$  for materialet som settes inn i platekondensatoren. *Tips:* Ladningen kan ikke endres når spenningskilden er frakopla.

### Oppgave 3. Seriekopling av kondensatorer.

- Utled uttrykket for resultantkapasitansen  $C$  når to kondensatorer (med kapasitans  $C_1$  og  $C_2$ ) koples i serie.
- En dielektrisk plate med tykkelse  $d$  og relativ permittivitet  $\epsilon_r$  puttes inn i en parallellplatekondensator med plateavstand  $D$  ( $d < D$ ). Arealet av alle plater er  $A$  og plateavstandene er små i forhold til arealet. Hva blir kapasitansen til den nye kondensatoren? *Tips:* Seriekopling.
- Vi måler kapasitansen for den nye kondensatoren til å være 125 pF. Hva er den relative permittiviteten  $\epsilon_r$  til plata når  $A = 300$  cm<sup>2</sup>,  $d = 1,25$  mm og  $D = 3,00$  mm?

Utvalgte fasitsvar:

- 1Ba)  $E_r = p \cos \theta / 2\pi\epsilon_0 r^3$ ,  $E_\theta = p \sin \theta / 4\pi\epsilon_0 r^3$ ,  
 1Bb)  $E_x = 3pxz / 4\pi\epsilon_0 (x^2 + z^2)^{5/2}$ ,  $E_z = p(2z^2 - x^2) / 4\pi\epsilon_0 (x^2 + z^2)^{5/2}$ ;  
 2c) 0,15 nF, 2d) 20; 3c) 3,34.