

# Kap. 22.

## Gauss' lov

### **Vi skal se på:**

- Fluksen til elektrisk felt  $E$
- Gauss' lov
  - Integralform og differensialform
- Elektrisk ledere.

$E$ -felt fra Coulombs lov:

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \cdot \hat{r}$$

Punktladn

$$\vec{E} = k \sum_n \frac{q_n}{r_{0n}^2} \hat{r}_{0n}$$

Flere punktladn.

$$\vec{E} = k \int_{\text{tot.ladn.}} \frac{dq}{r^2} \cdot \hat{r}$$

Kontinuerlig fordeling

Blir lett vanskelig integrasjonsarbeid.

En enklere metode?

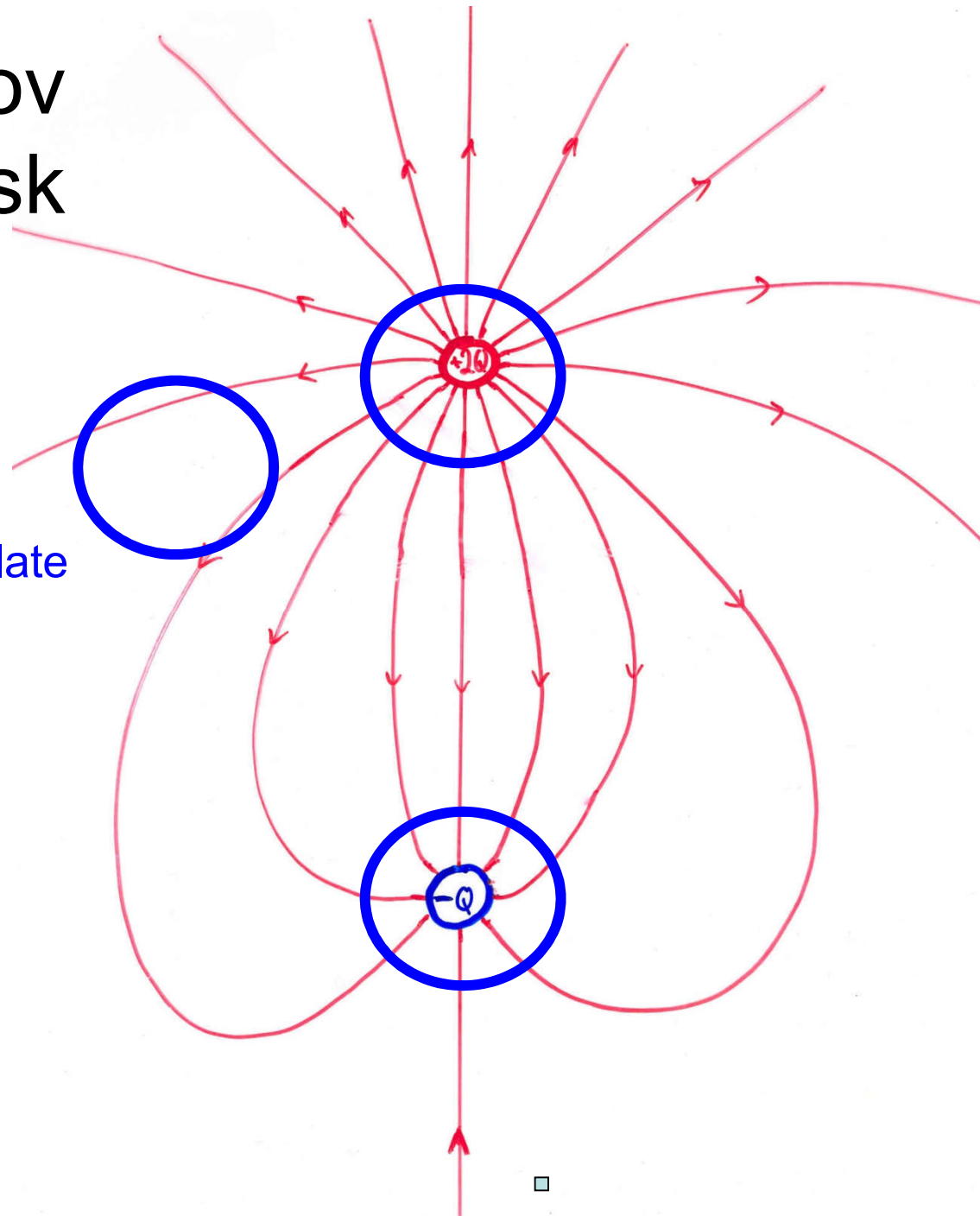
Ja: Gauss' lov



Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855),  
tysk matematiker / fysiker

# Gauss' lov skjematisk

Lukket flate

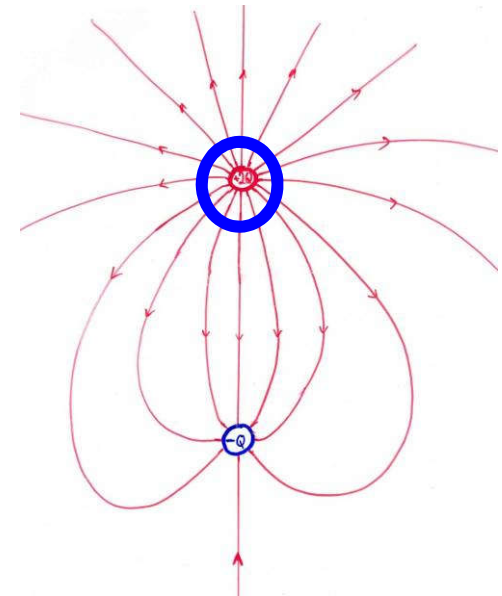


# Gauss' lov

Gjelder lukkede flater.

- Antall feltlinjer ut – ant. feltlinjer inn prop. med: ladning innenfor.
- Netto fluks ut =  $1/\epsilon_0$  (ladn. innenfor)

- Integralform: 
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{encl}}$$



# Gauss' lov

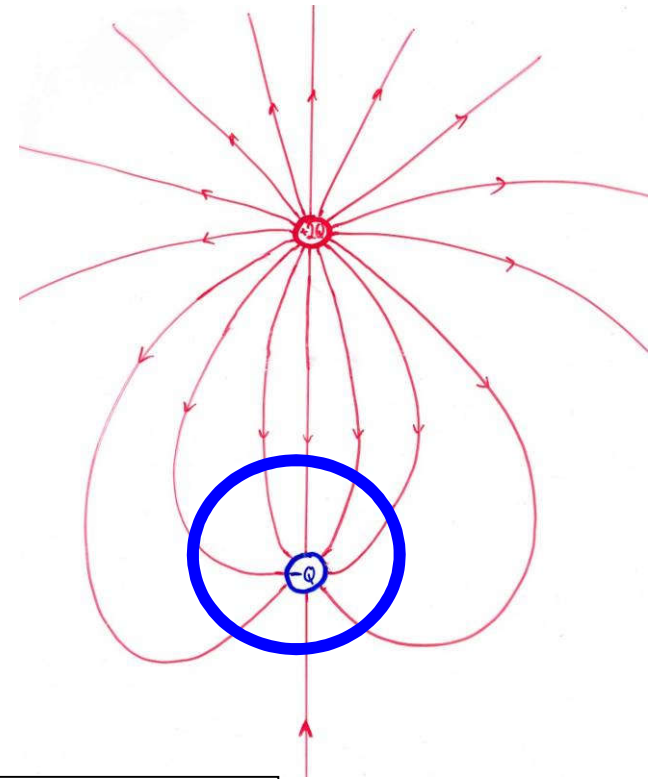
Gjelder lukkede flater.

- Antall feltlinjer ut – ant. feltlinjer inn er prop. med ladning innenfor.

- Integralform:  $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{encl}}$

$\vec{E}$  på flata S  
(fra **alle** ladninger,  
ikke bare  $q_{\text{encl}}$ )

Ladning innenfor  
flata S

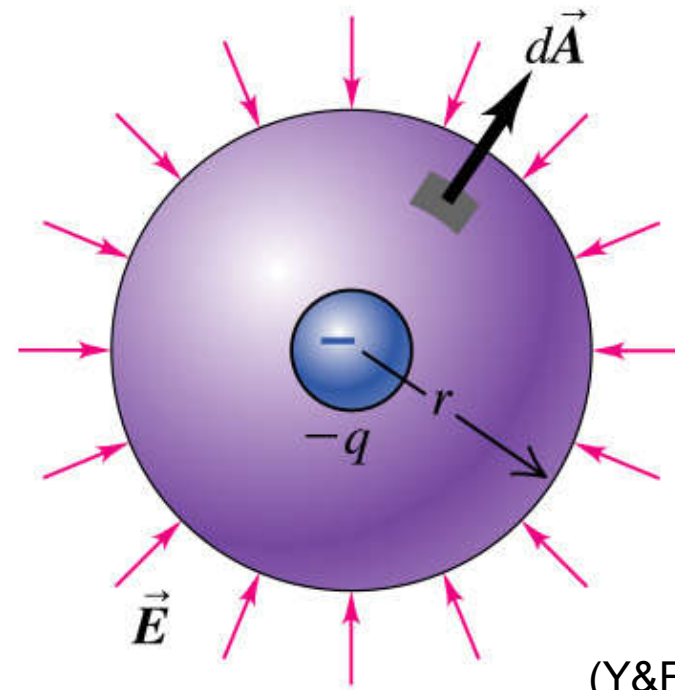
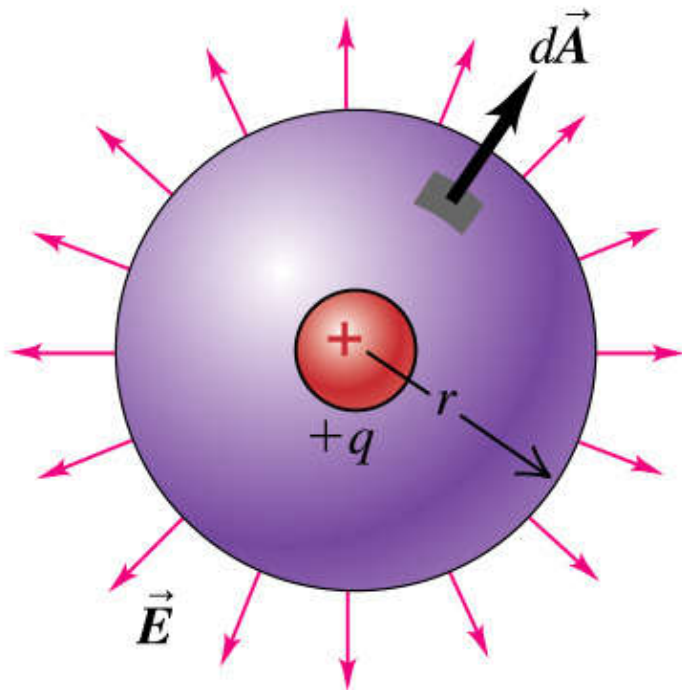


Fluks ut fra lukka flate  $S = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$

$d\vec{A}$  retning utover på gaussflata  $S$

Fluksen går ut fra positiv ladning fordi  $d\vec{A}$  og  $\vec{E}$  samme retning

Fluksen går inn mot negativ ladning fordi  $d\vec{A}$  og  $\vec{E}$  motsatt retning



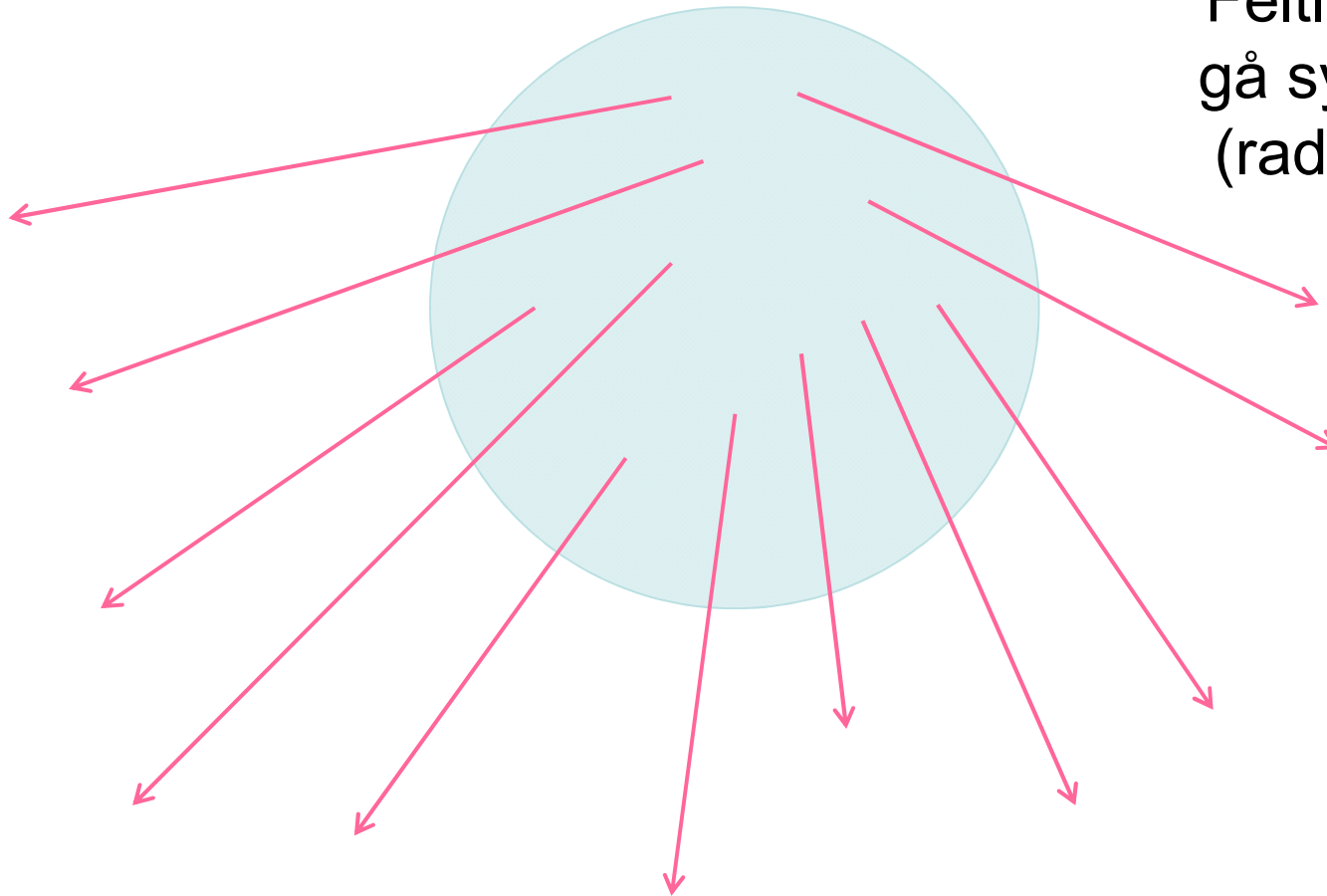
(Y&F Fig 22.14)

# Eks.1: Homogent ladd kule

=Y&F Ex. 22.9 = LHL 19.12

**UMULIG  
LØSNING**

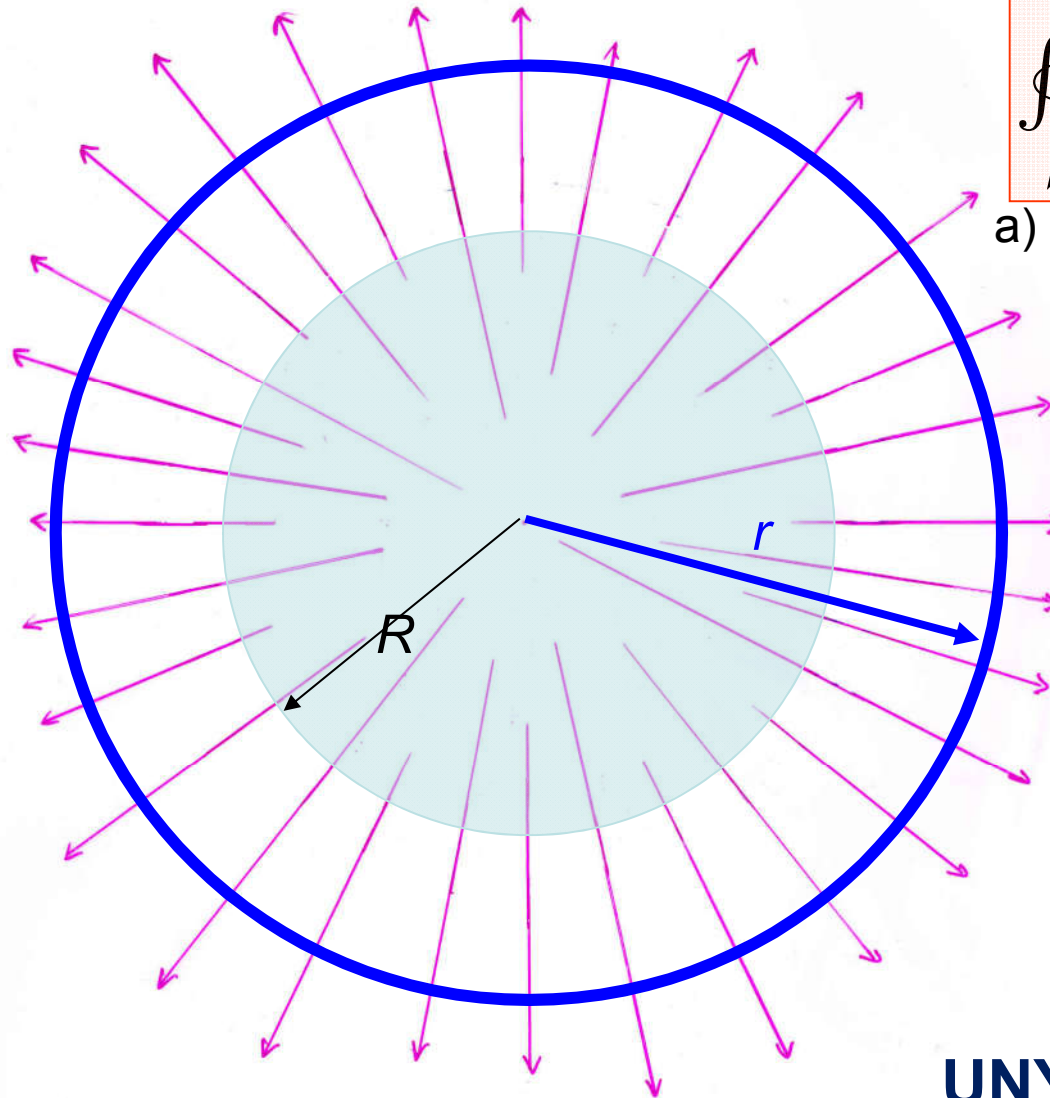
Feltlinjene må  
gå symmetrisk  
(radielt) ut fra  
kula.



# Eks.1: Homogent ladd kule

=Y&F Ex. 22.9 = LHL 19.12

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (*)$$



$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{encl}}$$

a) Utenfor kula  $r > R$ :

$$q_{\text{encl}} = Q$$

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

b) Inni kula  $r < R$ :

$q_{\text{encl}}$  er mindre

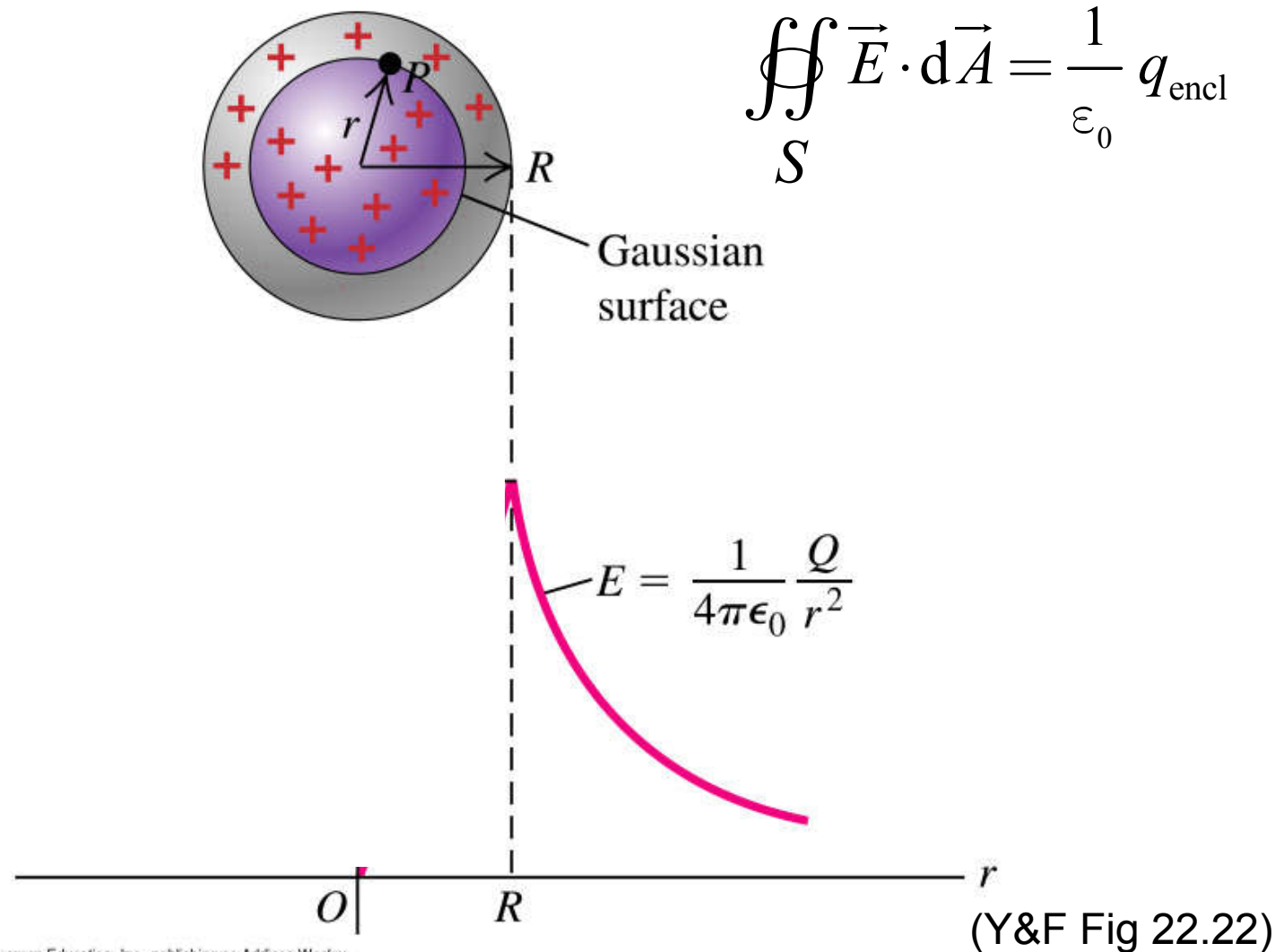
$$q_{\text{encl}} = Q r^3/R^3$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3}$$

UNYTTIG

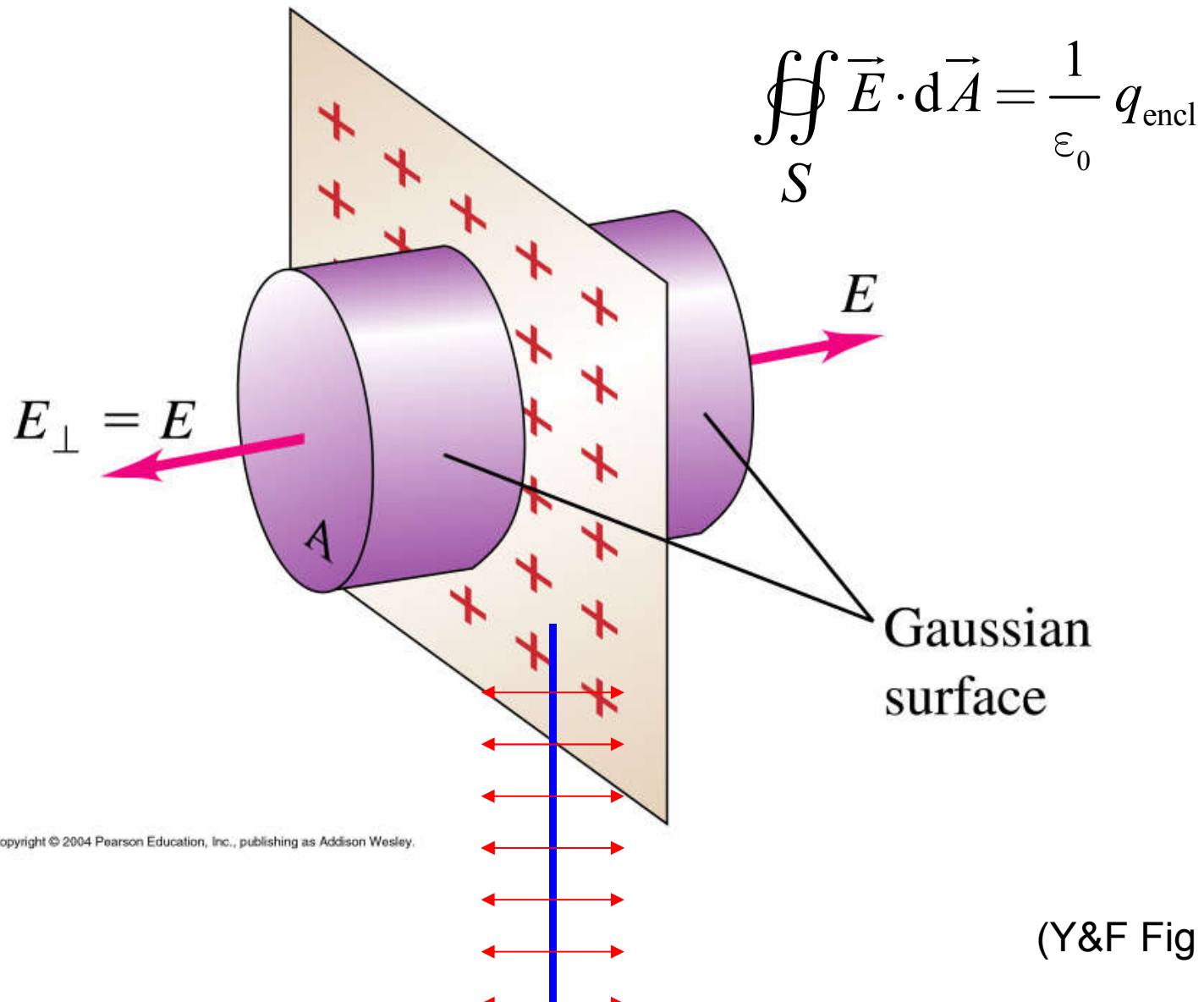


# Eks.1: Homogent ladd kule



# Eks.2: Felt nær flateladning

=Y&F Ex. 22.7 = LHL 19.14



# Eksempler

i forelesning (Eks...), Y&F Ed13 (Ex...), og LHL (L...)

	Kap 21. $E$ -felt	Kap 22. Gauss lov	Kap 23. Potensial
Dipol	Eks. 2 Ex. 21.8+21.14 L19.6		Eks. 4 Ex. 23.4
Linjeladning endelig	Eks. 3 Ex. 21.10		Ex. 23.12
Linjeladning uendelig	(Eks. 3) L19.7	Eks. 5 Ex. 22.6, L19.13	Eks. 9 Ex. 23.10
Tynn ring	Eks. 4 Ex. 21.9		Eks. 7 Ex. 23.11
Sirkulær plate	Eks. 5 Ex. 21.11		
Uendelig plate	Eks. 6 Ex. 21.11 L19.9	Eks. 2 Ex. 22.7 L19.14	Eks. 5B L19.15
Parallellplater	Ex. 21.12 Eks. 7	Ex. 22.8	Eks. 5 Ex. 23.9
Kule med homogen ladning		Eks. 1 Ex. 22.9 L19.12	Eks. 8 L19.19
Lederkule		Eks. 3 Ex. 22.5	Eks. 6 Ex. 23.8

## Ladningstettheter:

	Symbol	Enhet	Infinitesimal ladning
Linje-	$\lambda$	C/m	$dq = \lambda dl$
Flate-	$\sigma$	C/m <sup>2</sup>	$dq = \sigma dA$
Rom-	$\rho$	C/m <sup>3</sup>	$dq = \rho d\tau$

I elmag brukes  $V$  for potensial, slik at vi velger  $\tau$  for volum (!)

Eks.: Romladning

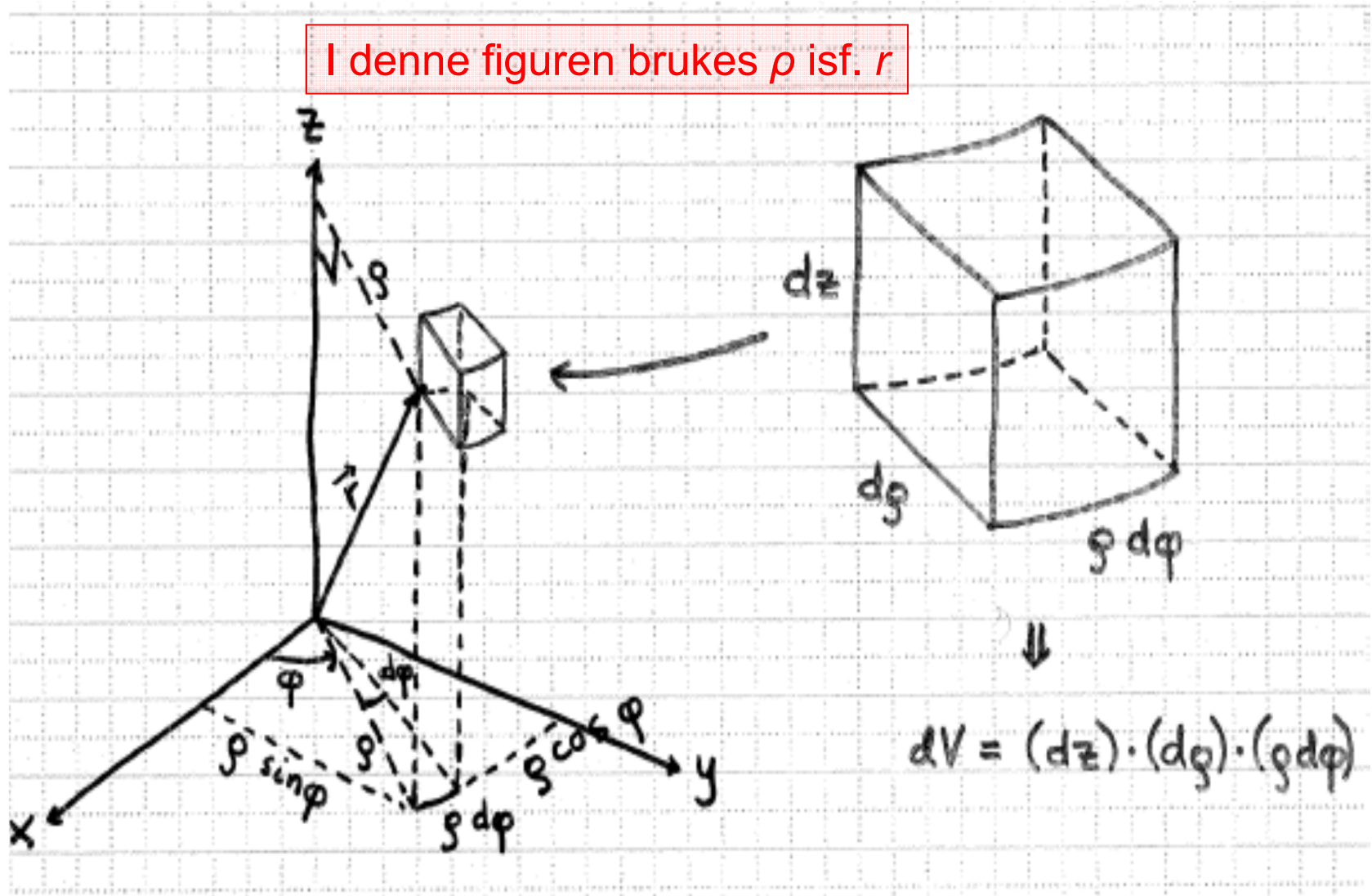
$$q_{\text{encl}} = \int dq = \iiint \rho d\tau$$

med høvelig volumelement  $d\tau$

# Sylinderkoordinater $(r, \varphi, z)$

Figur: Støvneng

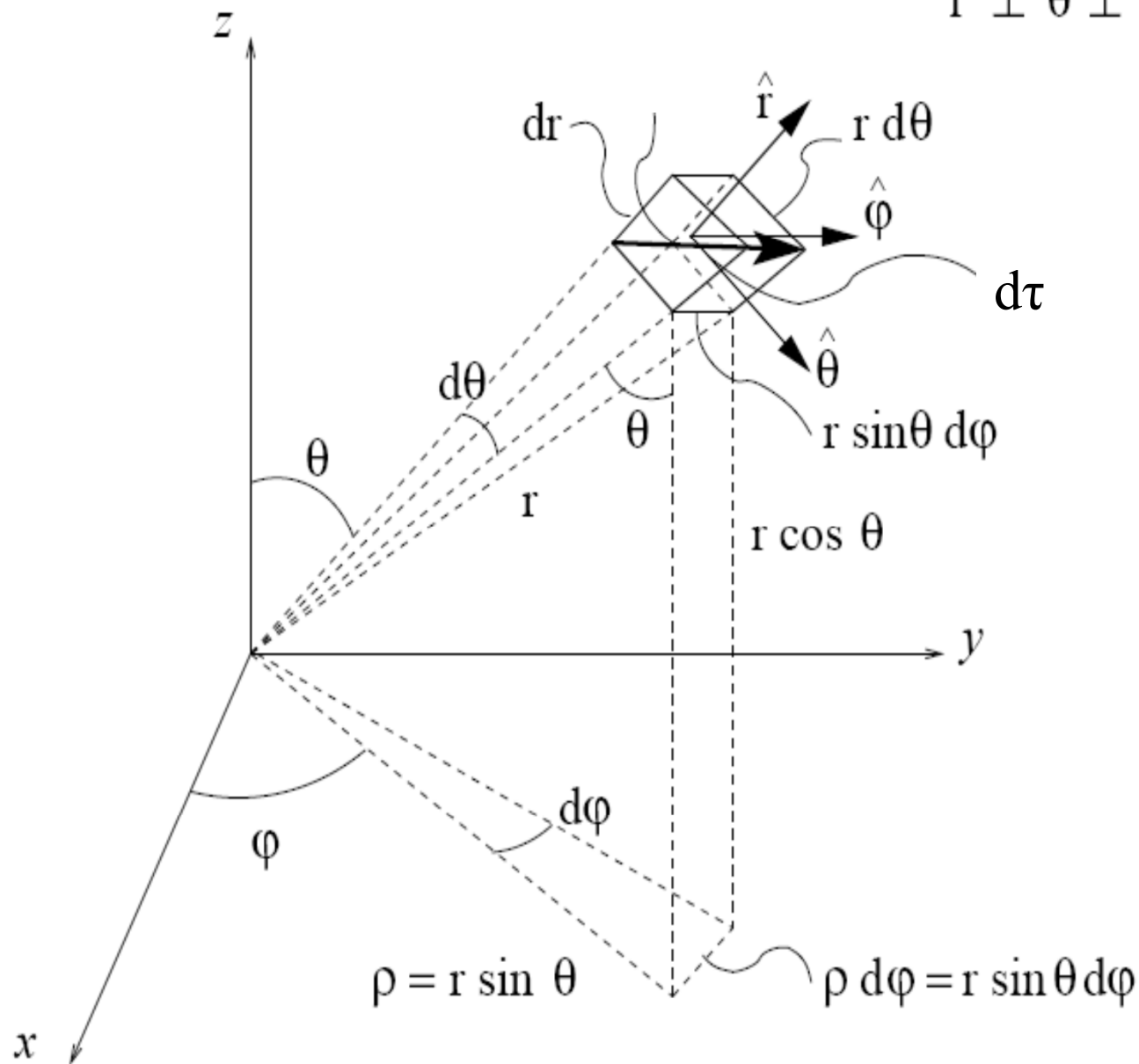
I denne figuren brukes  $\rho$  isf.  $r$



# Kulekoordinater $(r, \theta, \varphi)$

Figur: Støvneng

$$\hat{r} \perp \hat{\theta} \perp \hat{\varphi}$$



# Infinitesimale volumelement

**Kartesiske koordinater:**  $d\tau = dx \, dy \, dz$

**Sylinderkoordinater:**  $d\tau = r \, d\varphi \, dr \, dz$

Integrert over  $\varphi$ :  $d\tau = \int_0^{2\pi} d\varphi \, r \, dr \, dz = 2\pi r \, dr \, dz$

Når **syndersymmetri** bruk alltid dette uttrykket:

$$d\tau = 2\pi r \, dr \, l = \text{omkrets} \, \text{tykkelse} \, \text{høyde}$$

**Kulekoordinater:**  $d\tau = dr \, r \, d\theta \, r \sin\theta \, d\varphi = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, r^2 \, dr$

Integrert over  $\theta$  og  $\varphi$ :  $d\tau = \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, r^2 \, dr = 2 \cdot 2\pi \, r^2 \, dr$

Når **kulesymmetri** bruk alltid dette uttrykket:

$$d\tau = 4\pi r^2 \, dr = \text{kuleareal} \, \text{tykkelse}$$

se også [formelark](#)

# Gauss' lov

- **Integralform:** 
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{encl}}$$

Fluks ut =  $1/\epsilon_0$  (ladn. innenfor)

- **Differensialform:** 
$$\text{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$\text{div} \vec{E}$  = divergensen til ***E***

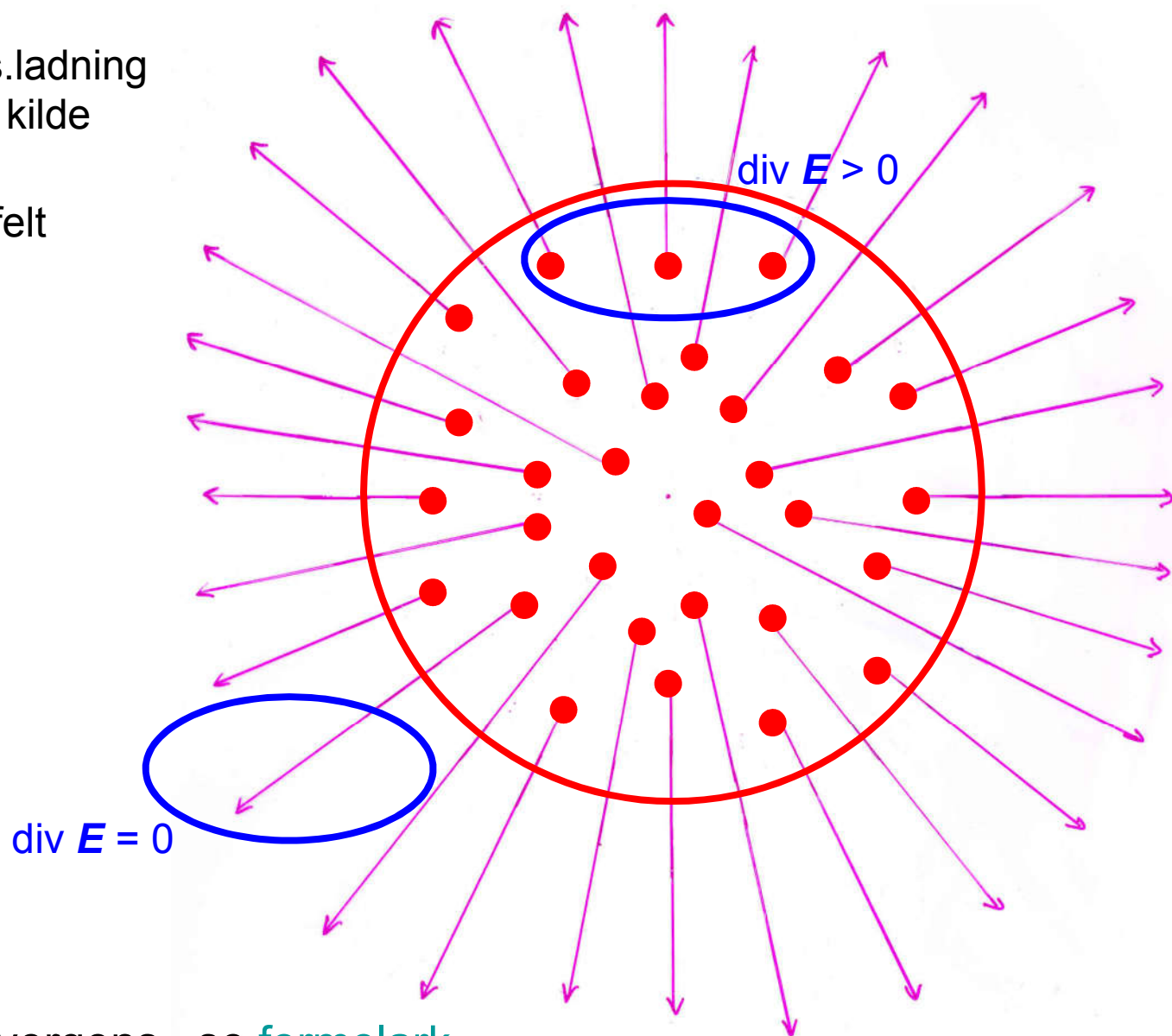
Dette er Maxwells likning nr. 1.



# divergens = kilde

● = pos.ladning  
= kilde

↖ =  $E$ -felt



Uttrykk divergens, se [formelark](#)

# Gauss' lov på differensialform:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho = \text{divergensen til } \vec{E}$$

Divergensen med nablaoperator:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

Kartesiske koordinater:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot [E_x, E_y, E_z] \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

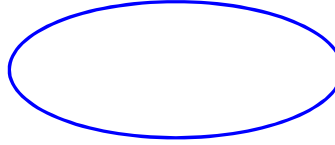
Sylinder- og kulekoordinater: Se formelark.

Kun  $r$ -avhengighet aktuelt ( $\partial / \partial r$ ).


# Oppsummering kap. 22. Gauss' lov

Fluks til  $\mathbf{E}$  definert ved flateintegral:  $\Phi_E = \iint \vec{E} \cdot d\vec{A}$

**Gauss' lov:** (fluks ut av gaussflate  $S$ ) =  $1/\epsilon_0$  (ladning innenfor)

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{encl}}$$


**Infinitesimal form:**

$$\text{div} \vec{E} \, d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \, d\tau$$


Gauss' lov er enklere enn Coulombs lov når det er symmetri i ladning og/eller i elektrisk felt.

Legg inn gaussflate slik at  $\mathbf{E} \parallel d\mathbf{A}$  eller  $\mathbf{E} \perp d\mathbf{A}$

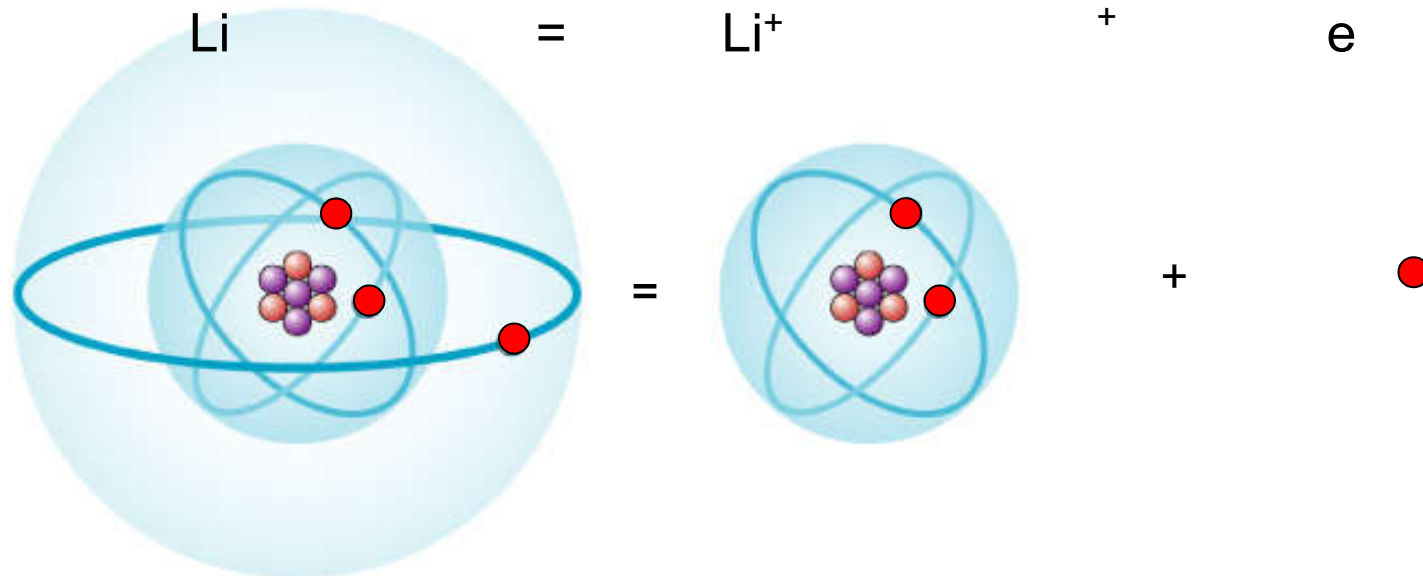
# Elektrisk leder med valenselektroner •

Et metallatom: 

Ett elektron frigjøres lett (valenselektron •)

Eksempel litium:

Nøytralt atom = positivt ladd ion + fritt elektron  
(valenselektron)



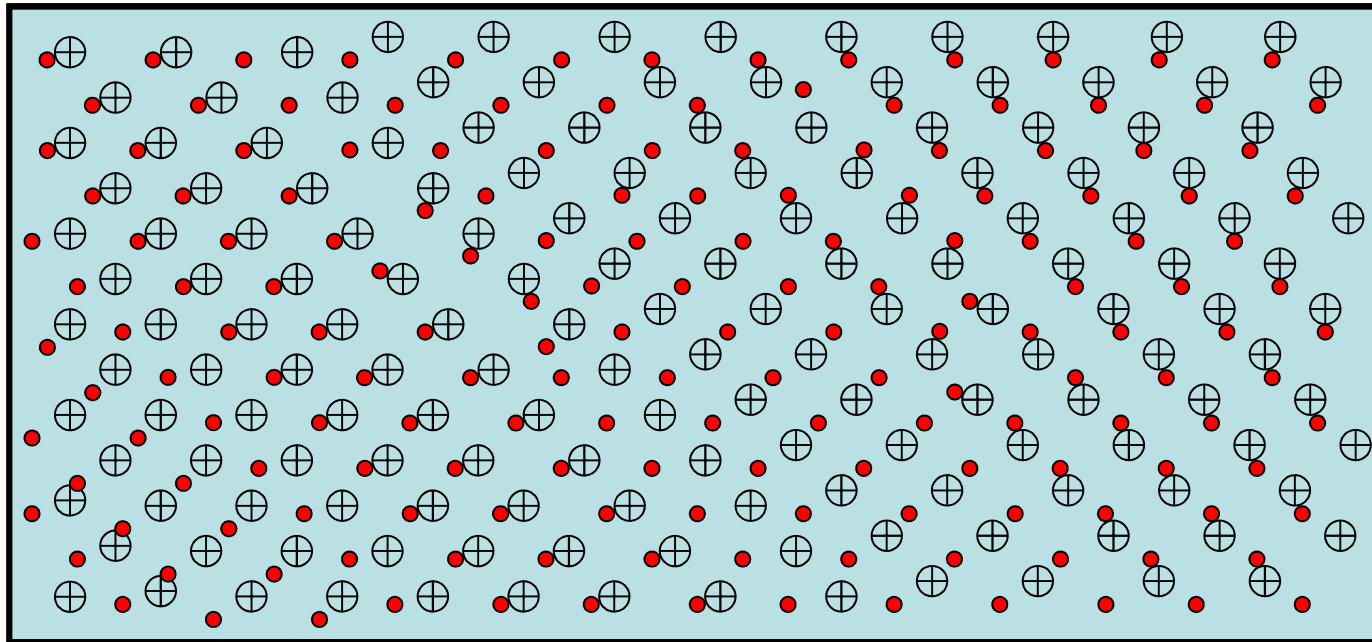
# Elektrisk leder med valenselektroner ●

Et metallatom: 

(eks Li)

Ett elektron frigjøres lett (valenselektron ●)

og valenselektronene beveger seg fritt i metallet:



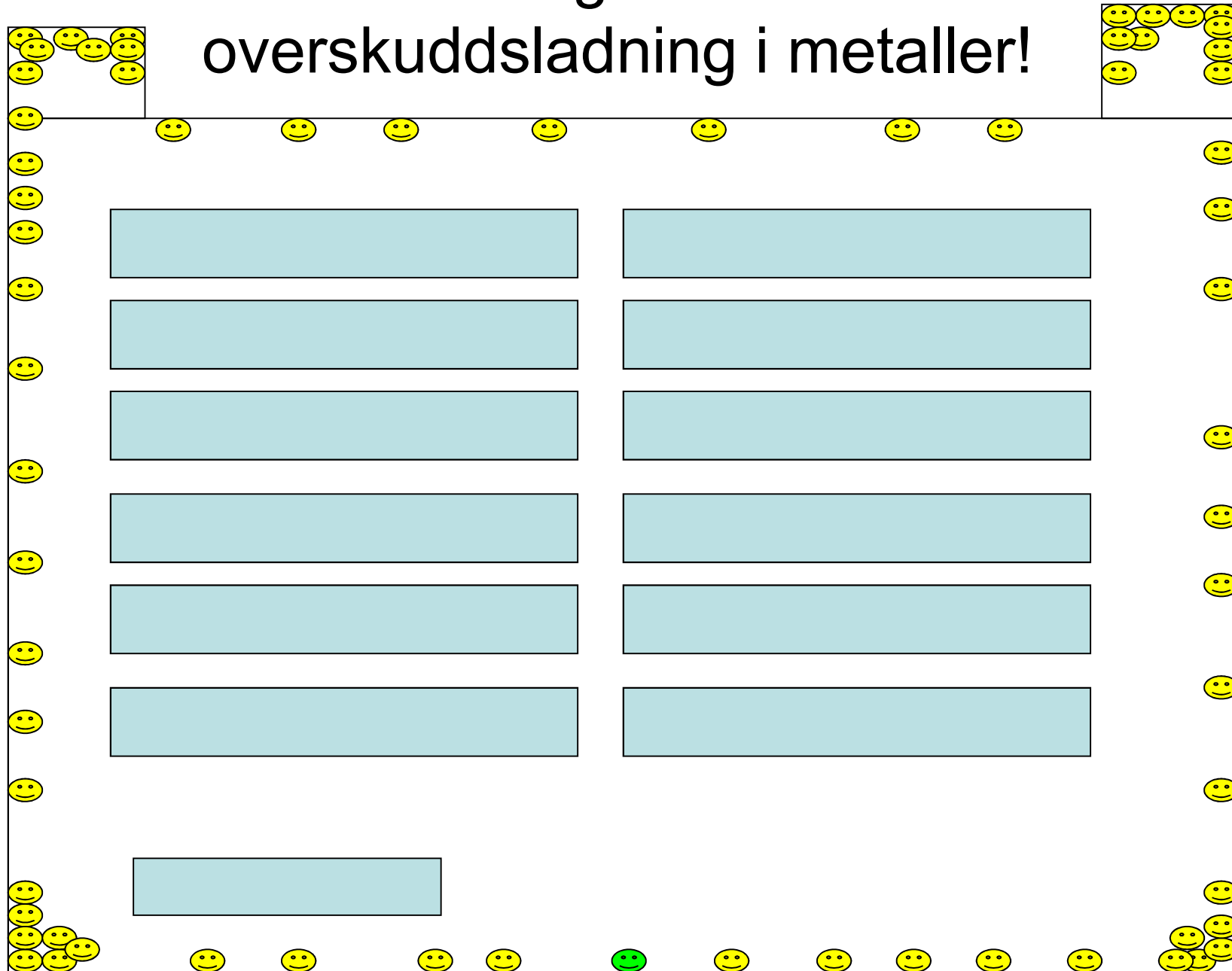
Totalt sett nøytralt

# Auditoriet: Hver av oss lades -1C

(Hvis samme  $q/m$ -forhold som et elektron, ville vi hatt ladning  $\sim 10^{13}$  C !!)

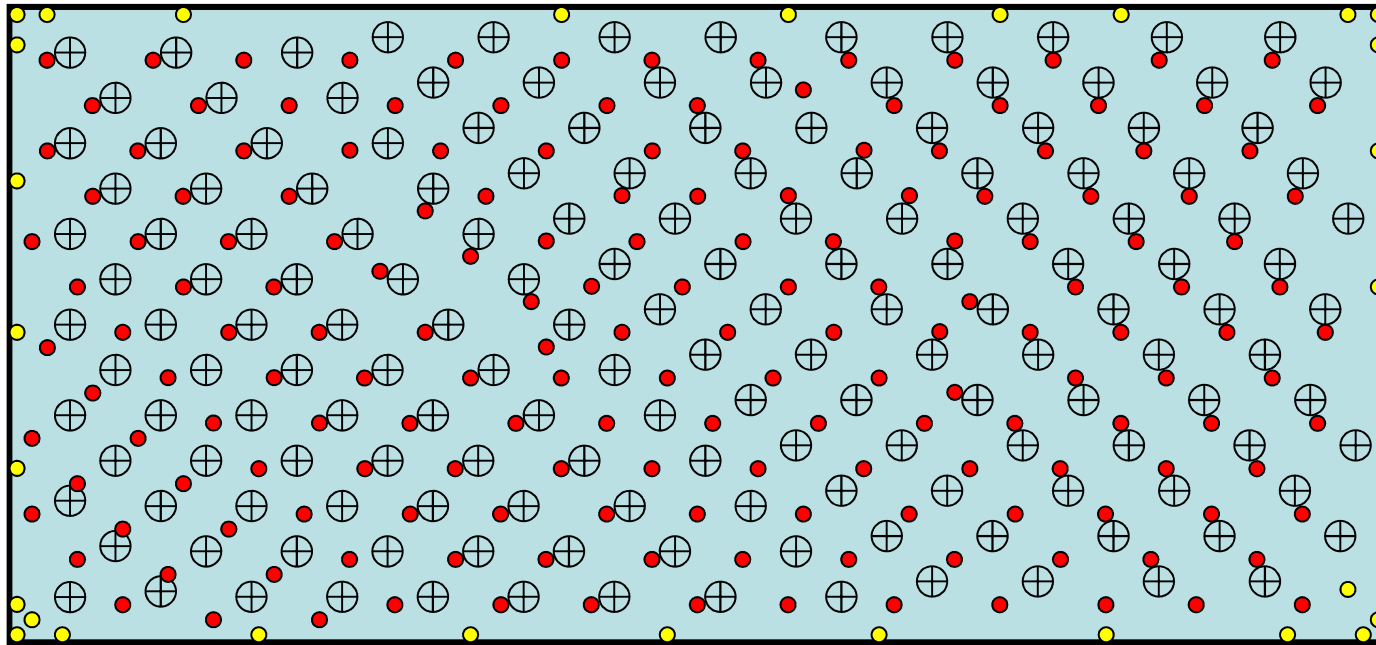


# Slik også med overskuddsladning i metaller!



# Elektrisk leder med valenselektroner ●

Negativt ladd metall: overskuddselektroner ●  
Disse presses til overflata



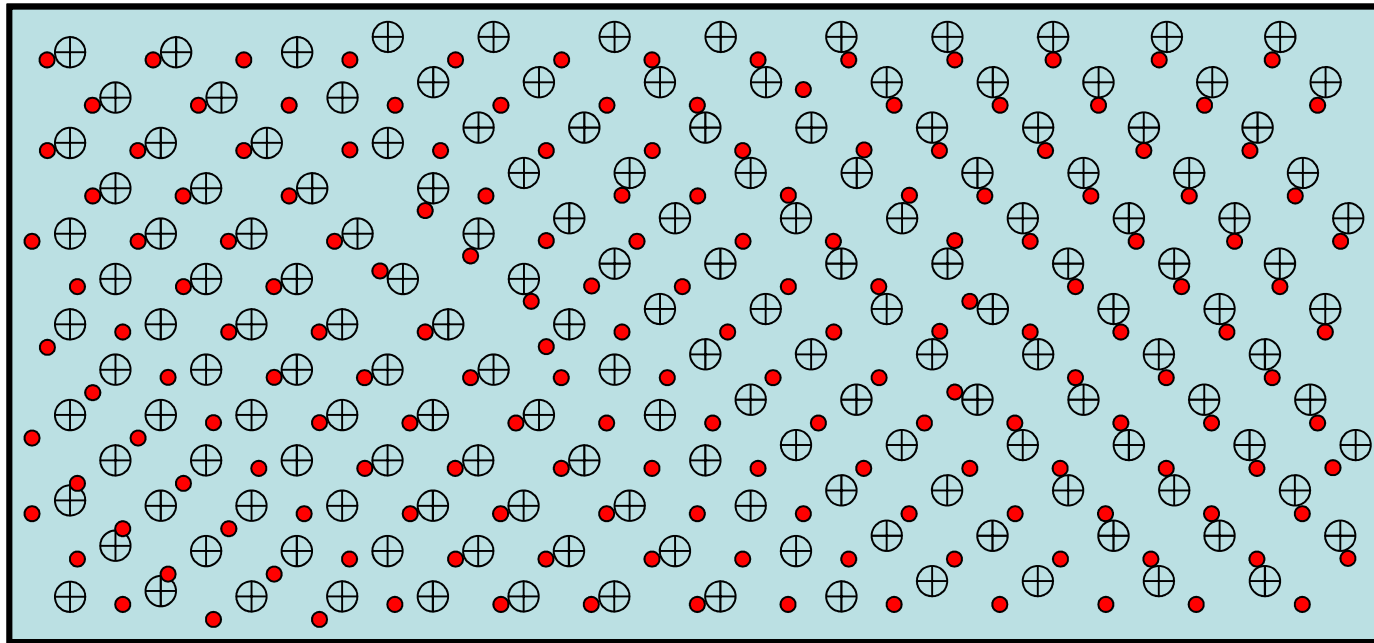
Totalt ladd negativt



# Elektrisk leder med valenselektroner ●

Positivt ladd metall: underskudd av elektroner

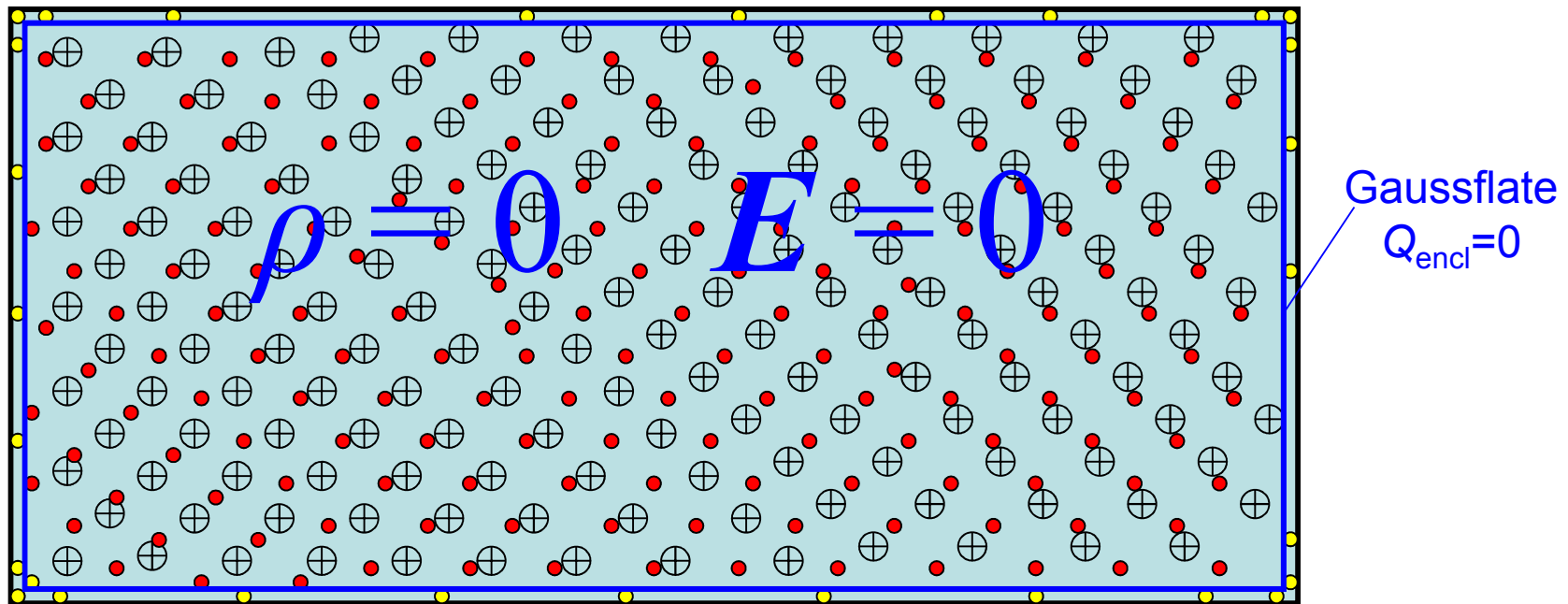
Underskuddet (positivt) presses også mot overflata



Totalt ladd positivt

# Elektrisk leder med valenselektroner ●

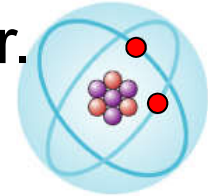
Negativt ladd metall: overskuddselektroner ●  
Disse presses til overflata



Totalt ladd negativt

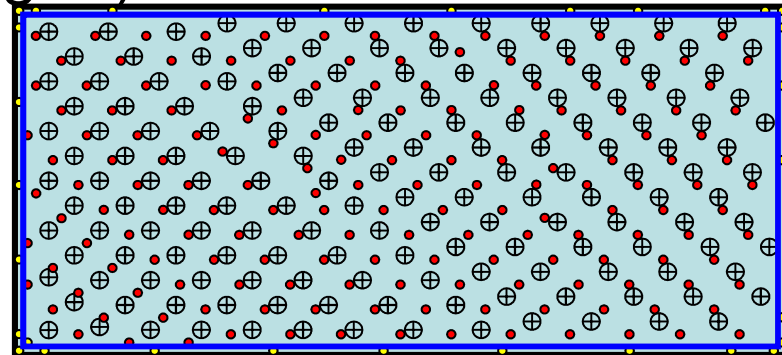
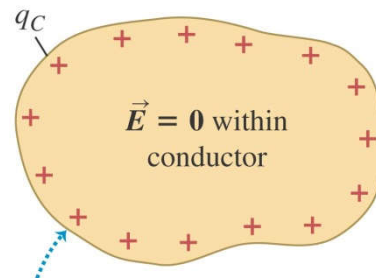
# Elektrisk ledere (metaller)

1. Metallatomer har ett eller flere frie valenselektroner.



2. Evt. overskuddselektroner skyves til overflata  
(=> kun overflateladning  $\sigma$ .)

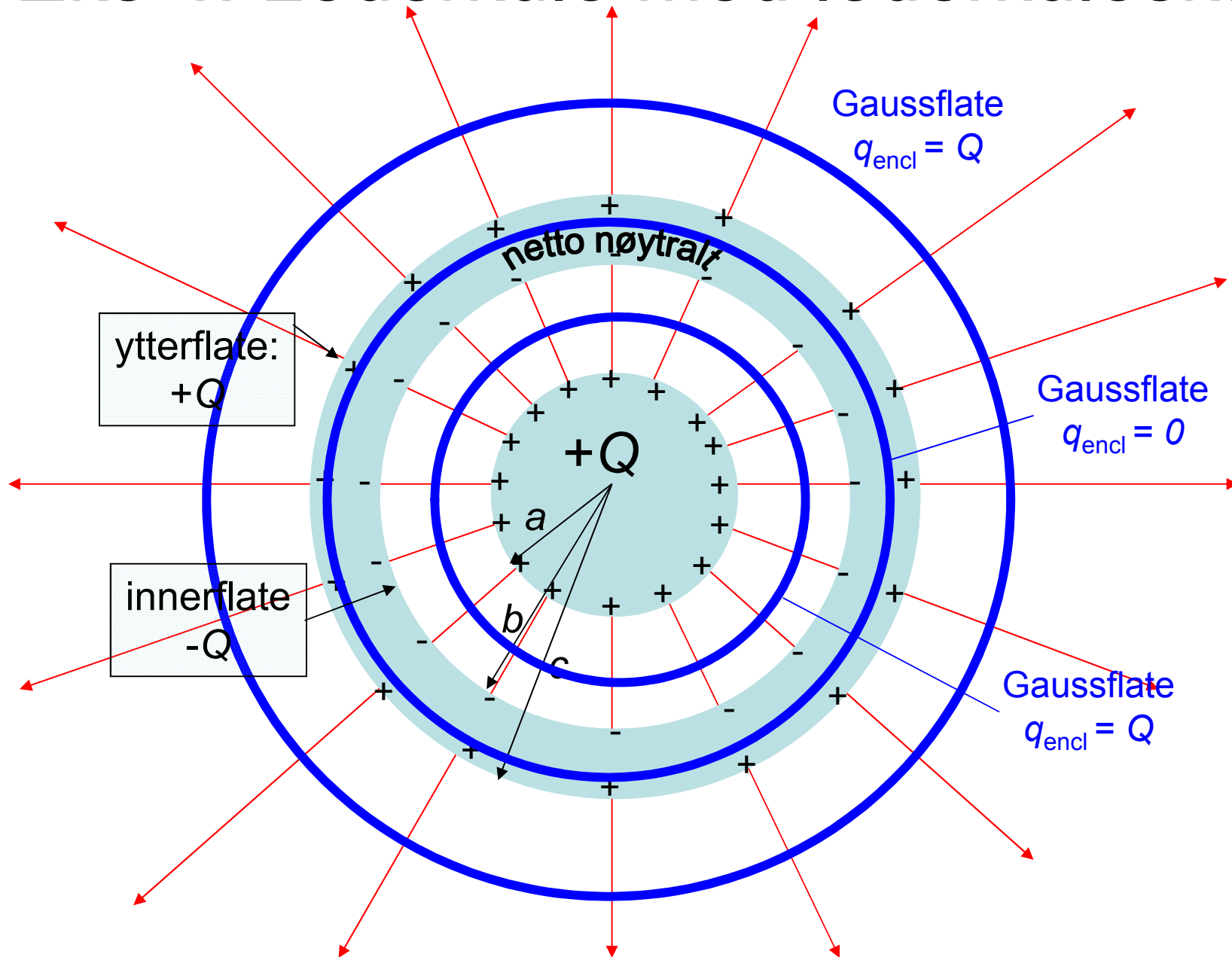
3.  $\rho = 0$  og  $\mathbf{E} = 0$  inni



4. Rett utenfor overflata:

kun  $\mathbf{E}$  normal:  $\mathbf{E}_\perp = \sigma/\epsilon_0$

# Eks.4: Lederkule med lederkuleskall

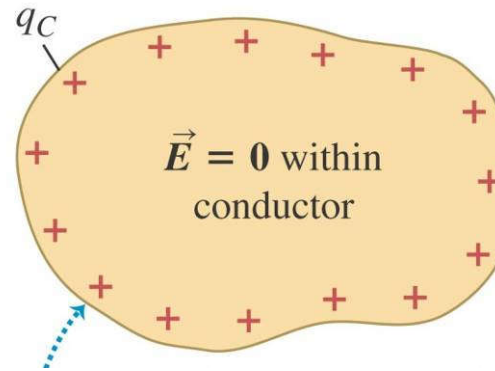


**Feltet er null  
overalt inne i  
ledere**

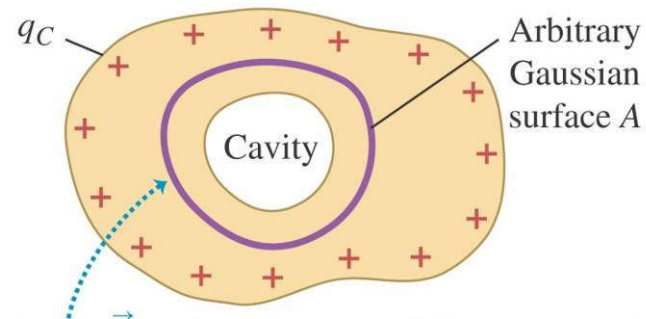
**.. og inne i  
ladningsfrie  
hulrom i  
ledere.**

**.. men ikke i  
hulrom med  
ladning.**

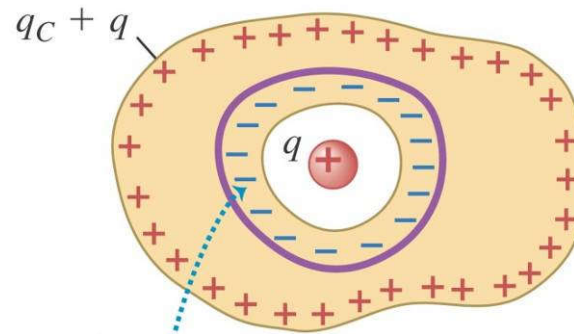
(a) Solid conductor with charge  $q_C$



(b) The same conductor with an internal cavity



(c) An isolated charge  $q$  placed in the cavity



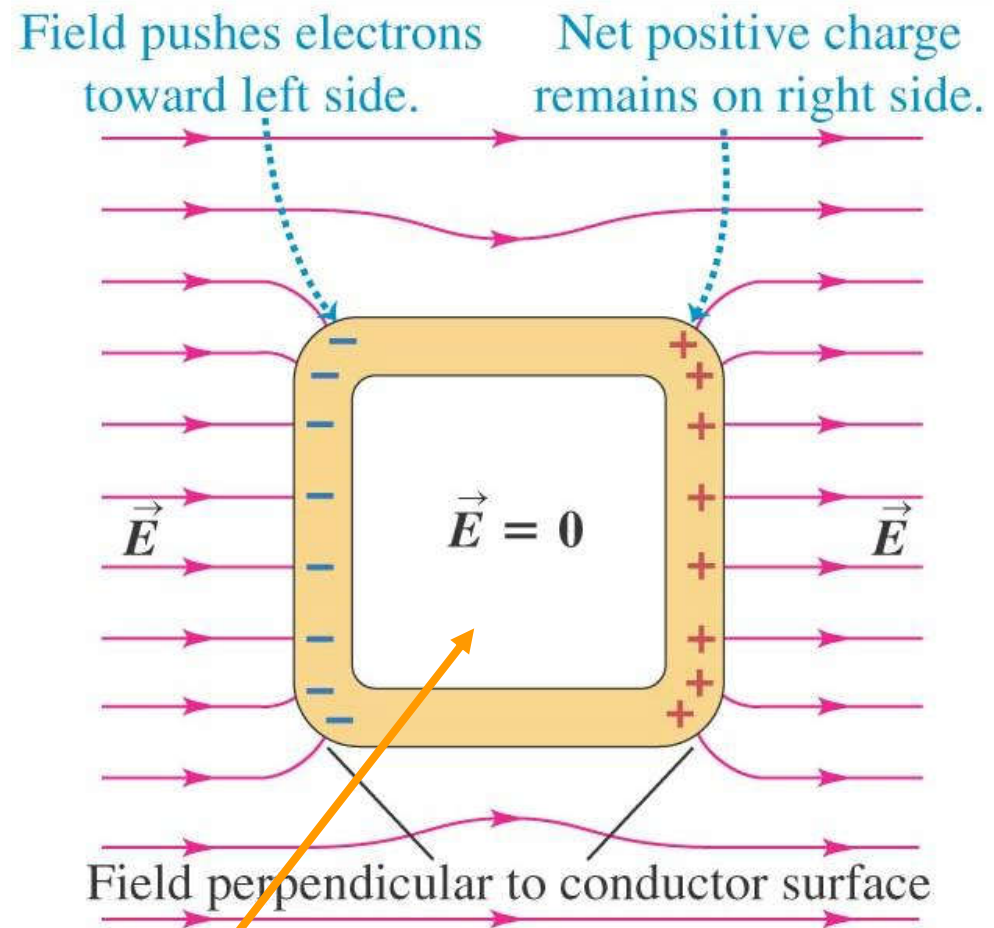
**..Øving 3,  
opg. 2.**

# Nøytral leder i ytre $E$ -felt

Ladninger forskyves akkurat  
så mye at:

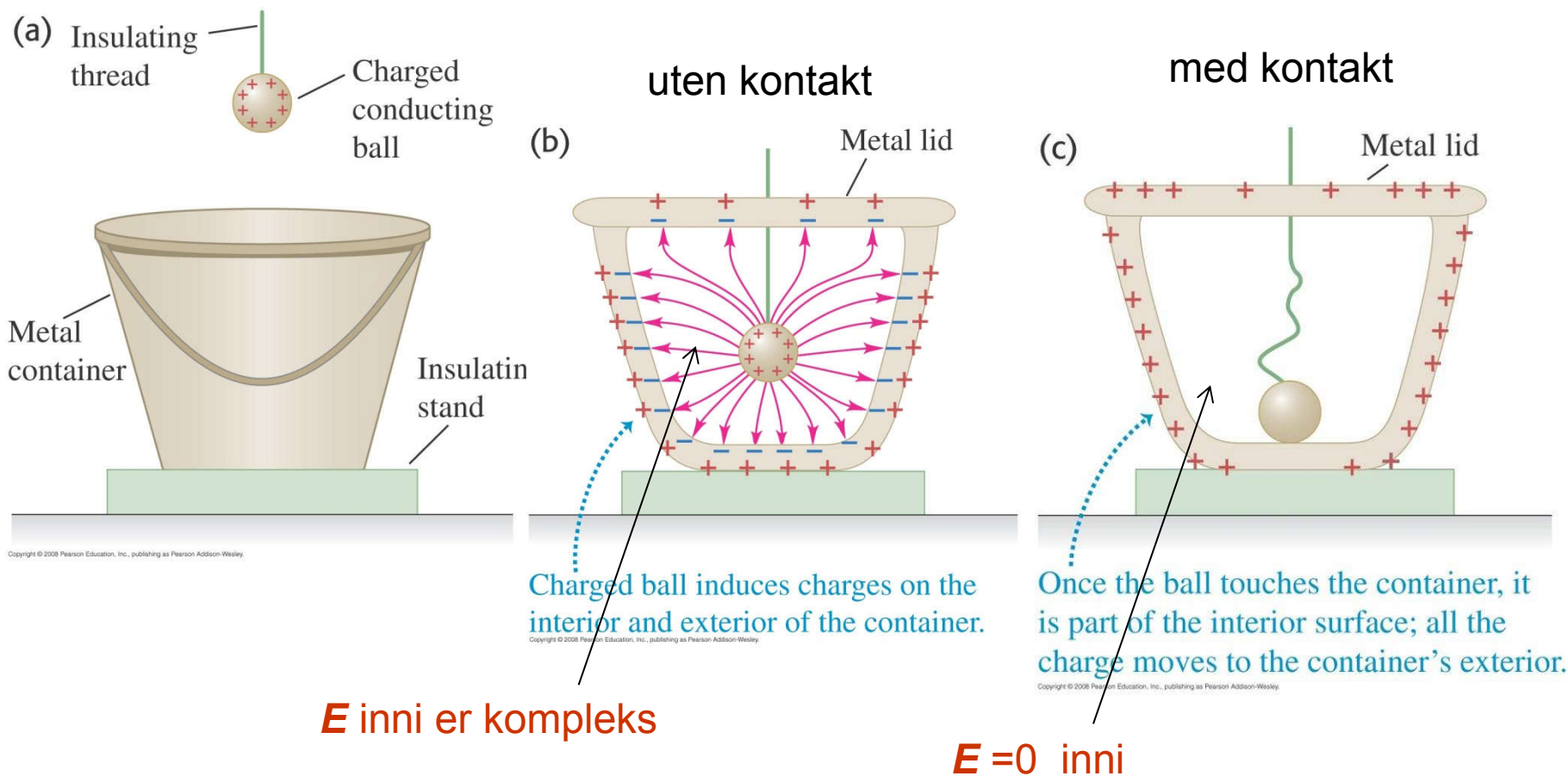
- 1)  $E = 0$  i leder og hulrom
- 2)  $E$  normal på overflata rett  
utenfor

rom som er skjermet  
fra  $E$ -felt:  
**Faradaybur**



Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.

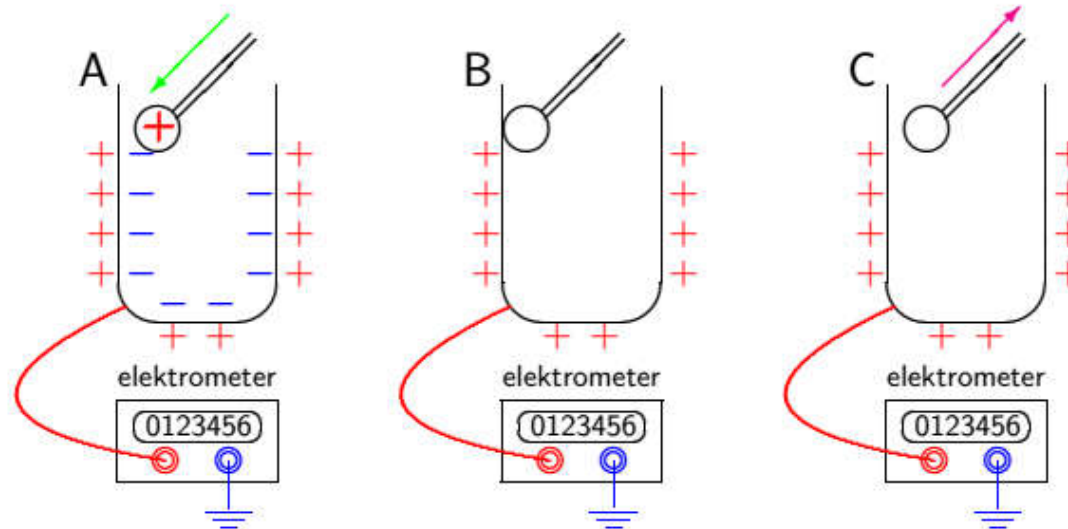
# Ladningsinduksjon og overføring av ladning. (Faradays bevis av Gauss' og Columbs lov)



# Ladningsinduksjon og overføring av ladning. Brukes i lab 1:



Figur 2.5: Faradayburet.

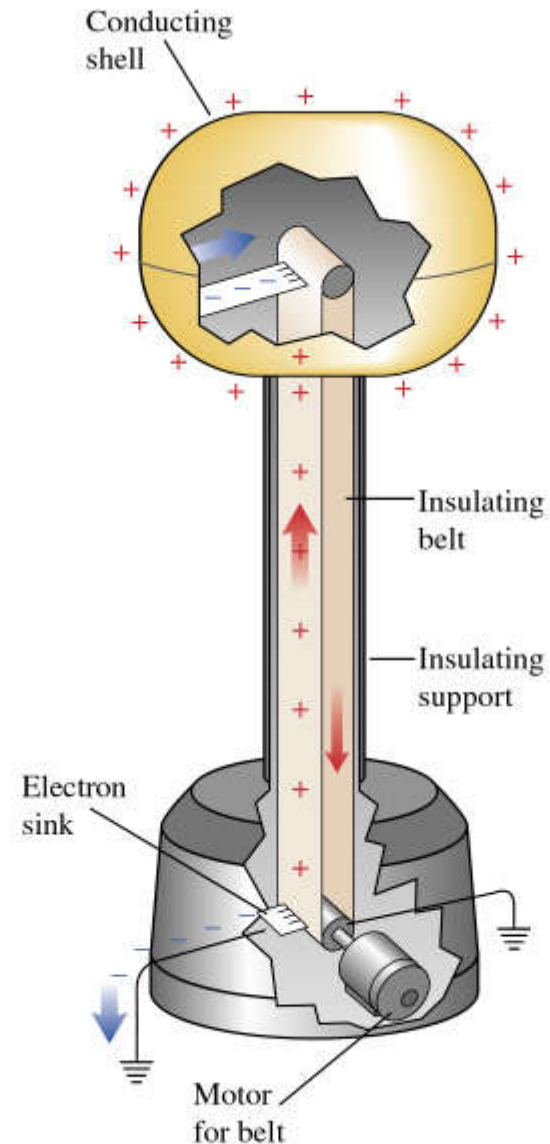


Figur 2.6: Måling av ladning med Faradaybur og elektrometer. Faradayburet er isolert fra jord og potensialet relativt jord måles. A: Ladd elektrode føres inn i Faradayburet og elektrometeret viser umiddelbart utslag. B: Elektroden i kontakt med Faradayburet. C: Elektroden trekkes ut og elektrometeret viser fortsatt samme utslag. Elektrodens opprinnelige ladning er overført til Faradaybur/ledning/elektrometer.

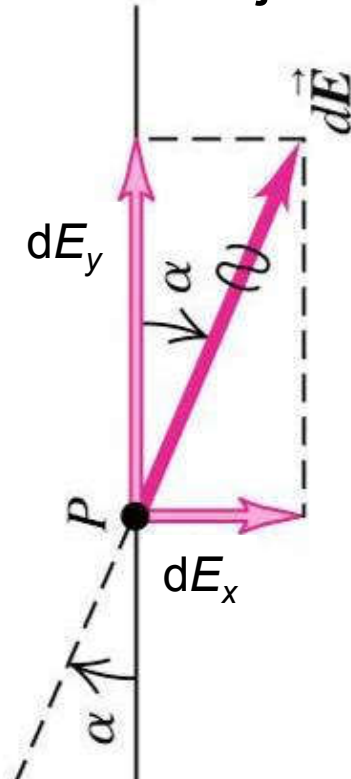


# van de Graaff generator (Y&F fig 22.26)

Ladning samles på  
*utsida av*  
metallkula, trenger  
bare tynt skall.



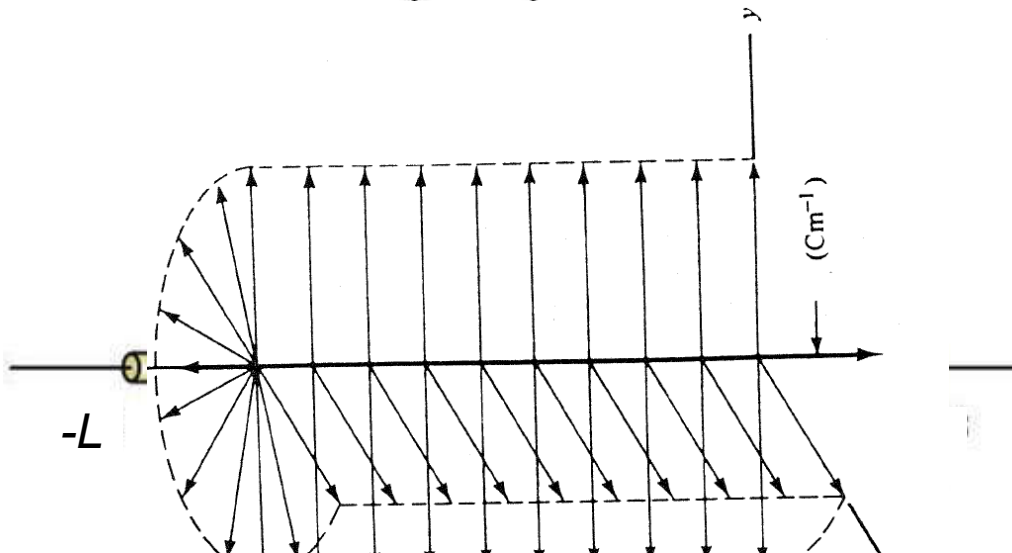
# Kap 21. Eks. 3. Linjeladning



Generell løsning: 
$$E_y = k \frac{\lambda}{y} \frac{2L}{\sqrt{L^2 + y^2}}$$

Nærme:  $y \ll L \Rightarrow E_y = k \frac{2\lambda}{y}$

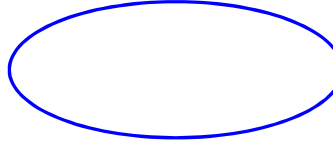
Nå med Gauss' lov




# Oppsummering kap. 22. Gauss' lov

Fluks til  $\mathbf{E}$  definert ved flateintegral:  $\Phi_E = \iint \vec{E} \cdot d\vec{A}$

**Gauss' lov:** (fluks ut av gaussflate  $S$ ) =  $1/\epsilon_0$  (ladning innenfor)

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{encl}}$$


**Infinitesimal form:**

$$\text{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$


Gauss' lov er enklere enn Coulombs lov når det er symmetri i ladning og/eller i elektrisk felt.

Legg inn gaussflate slik at  $\mathbf{E} \parallel d\mathbf{A}$  eller  $\mathbf{E} \perp d\mathbf{A}$

I **ledere** flytter ladninger seg tilnærmet uten motstand.

Like ladninger frastøter hverandre og legger seg på **overflata** av lederen.

Inni alle ledere er derfor  $\rho = 0$  og  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ .