Notat 7: Elektromagnetiske bølger

Siden Young & Freedman presenterer kun Maxwells likninger på integralform, er også utledningen av elektromagnetiske bølger (emb) i kap. 32 basert på integralformen. Utledning av emb fra differensialformen av Maxwells likninger er mer elegant og ble vist i forelesning og presenteres her. Lillestøl, Hunderi og Lien presenterer denne utledningen i kap. 28.3 og Griffiths i kap. 9.2. Utledningen forutsetter forståelse av endimensjonal bølgelikning og løsningen av denne (bølgefunksjonen).

A.Mikkelsen 29.03.17.

I områder hvor vi ikke har ladninger eller strømmer vil Maxwells likninger lyde (se også Notat 4: Maxwells likninger):

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \tag{1}$$

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{2}$$

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu\epsilon\frac{\partial\Phi_E}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\partial\Phi_B}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,. \tag{4}$$

I det videre bruker vi kun differensialformene. Merk at vi her finner perfekt symmetri mellom $\mu\epsilon\vec{E}$ og $-\vec{B}$!

Utfører først $\vec{\nabla}\times$(likn. 4). Fra f.eks. Rottmann er $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E}$, slik at vi får

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right). \tag{5}$$

Fra likn. (1) er $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ og fra likn. (3) er $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. Dette gir

$$\nabla^2\vec{E} = \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\,. \tag{6}$$

Vi kunne brukt $\vec{\nabla}\times$(likn. 3) og ved tilsvarende framgangsmåte kommet fram til

$$\nabla^2\vec{B} = \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\,, \tag{7}$$

som bekrefter symmetrien i $\vec{E}$ og $\vec{B}$.

Dette likner mye på bølgelikningen i én dimensjon med utbredelse i x-retning, dvs. følgende likning for $y(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,. \tag{8}$$

Likn. (6) og (7) er bølgelikninger i *tre dimensjoner* for henholdsvis $\vec{E}$ og $\vec{B}$, og ved sammenlikning med (8) ser vi at bølgefarten er v er bestemt av $1/v^2 = \mu\epsilon$. Vi bruker oftest $c = v$ for bølgefarten til emb[1] slik at $c = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon}}$.

Laplaceoperatoren ∇^2 på en skalar er gitt bl.a. i Rottmann (som bruker symbolet Δ), og er i Kartesiske koordinater:

$$\Delta\psi = \nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\,.$$

Laplaceoperatoren på en vektor, som brukt i likn (6), er i kartesiske koordinater gitt ved

$$\begin{aligned}\nabla^2\vec{E} &= \left[\nabla^2 E_x,\ \nabla^2 E_y,\ \nabla^2 E_z\right]\\ &= \left[\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2},\quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2},\quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2},\right].\end{aligned}$$

---

[1] I vakuum er bølgefarten $c_0 = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}\cdot 8{,}854187818\cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}}} = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$. Dette er en eksakt verdi for c_0 gjennom definisjon av 1 meter. M.a.o. har tomromspermittiviteten verdi fra denne definisjonen: $\epsilon_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mu_0 c_0^2}$.

I vann (og andre materialer) er permittiviteten større enn ϵ_0 og avhengig av bølgens frekvens ω. Synlig lys i vann har $\epsilon = \epsilon_r\epsilon_0 \approx 1{,}8\cdot\epsilon_0$ og dermed er lysfarten $c = \sqrt{\frac{1}{1{,}8}}\cdot c_0 = \frac{c_0}{1{,}34} = 0{,}75\cdot c_0$. Brytningsindeksen er definert $n = \frac{c_0}{c}$, som altså i dette tilfellet blir 1,34.

Vi betrakter kun planbølger, dvs. bølger i én dimensjon. La oss velge x som bølgeretningen, dvs. $\vec{E}(x,t)$. Da forsvinner alle ledd i Laplaceoperatoren unntatt $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Dvs. i likn. (6) vil $\nabla^2 \to \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ og likningen gir da bølgelikninger for hver komponent E_x, E_y og E_z:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}\,, \tag{9}$$

som med $\vec{E}(x,t) = [E_x(x,t),\, E_y(x,t),\, E_z(x,t)]$ kan slås sammen til én bølgelikning for $\vec{E}(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \vec{E}(x,t)}{\partial t^2}\,. \tag{10}$$

Løsningen er, med $\omega/k = c$ (kjent fra bølgefysikken):

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(kx \mp \omega t)\,. \tag{11}$$

Men Maxwellikningene gir bestemte restriksjoner på $\vec{E}(x,t)$. Først, ifølge likn. (1) skal $\vec{E}$ være divergensfritt:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \;=\; \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0\,.$$

Siden $\vec{E}(x,t) = [E_x(x,t),\, E_y(x,t),\, E_z(x,t)]$ er avhengig av kun x er de to siste leddene uansett null, og for å få null divergens må da $E_x = 0$. Derfor kan $\vec{E}(x,t)$ og $\vec{E}_0$ ha kun y- og z-komponenter, dvs. normalt på bølgeretningen, og bølgen er *transversal*. Alle emb er transversale!

Hvis vi *velger* oss $\vec{E}_0$ i y-retning - dvs. en éndimensjonal bølge $\underline{\vec{E} \text{ planpolarisert i } y\text{-retning}}$ - kan bølgefunksjonen (11) uttrykkes

$$\underline{\vec{E}(x,t) = E_0\,\hat{\mathbf{j}}\,\cos(kx \mp \omega t)}.$$

Tilsvarende analyse av bølgelikningen for $\vec{B}$ (likn. 7) gir den endimensjonale bølgefunksjonen

$$\vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 \cos(kx \mp \omega t).$$

Likn. (2) gir samme restriksjon som for $\vec{E}$, nemlig at $\vec{B}(x,t)$ og $\vec{B}_0$ kan ha kun y- og z-komponenter.

Med $\vec{B}(x,t)$ kun avhengig av x og vårt valg $\vec{E}(x,t) = E_0\,\hat{\mathbf{j}}\,\cos(kx \mp \omega t)$, gir likn. (3)

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} \;=\; \frac{\partial B_y}{\partial x}\,\hat{\mathbf{k}} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\,\hat{\mathbf{j}} \;\overset{(3)}{=}\; \mu\epsilon E_0\,\hat{\mathbf{j}}\,(\pm\omega)\sin(kx \mp \omega t)\,,$$

som medfører at $B_y = 0$, dvs. $\vec{B}$ kan kun ha komponent i z-retning med

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} \;=\; \mp\mu\epsilon E_0\omega\sin(kx \mp \omega t)\,, \tag{12}$$

$$B_z \;=\; \pm\mu\epsilon\frac{\omega}{k}E_0\cos(kx \mp \omega t). \tag{13}$$

Altså er

$$\underline{\vec{B}(x,t) = B_0\,\hat{\mathbf{k}}\,\cos(kx \mp \omega t)}, \qquad \text{der} \quad B_0 = \pm\mu\epsilon\frac{\omega}{k}E_0 = \pm\frac{1}{c^2}\,c\,E_0 = \pm\frac{E_0}{c}\,.$$

Det er altså et bestemt forhold mellom amplitydene E_0 og B_0, avhengig av bølgefarten c.

Hvis vi istedenfor $\vec{E}$ planpolarisert i y-retning valgte $\underline{\vec{E} \text{ planpolarisert i } z\text{-retning}}$, ville vi finne tilsvarende

$$\underline{\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0\,\hat{\mathbf{k}}\,\cos(kx \mp \omega t)} \qquad \underline{\vec{B}(x,t) = -\vec{B}_0\,\hat{\mathbf{j}}\,\cos(kx \mp \omega t)},$$

også her med

$$B_0 = \pm\frac{E_0}{c}\,.$$

For upolarisert bølge vil vi ha litt av hver planpolarisert bølge, og kan settes sammen med superposisjonsprinsippet. Merk at for alle polarisasjonstilfeller vil bølgens gangretning være i same retning som $\vec{E}\times\vec{B}$, og dette gjelder for alle emb. Se figurer/skisser i kopi av powerpoint-slides.