Inst. for fysikk 2015 **TFY4155/FY1003 Elektr. & magnetisme**

Eksamen 24. mai 2014. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Rett svar:	A	E	B	B	C	D	A	E	D	A

Detaljer om spørsmålene:

a) A. Utenfor en uendelig stor postiv ladd plate er E-feltet konstant og feltet peker utover. Dvs. at potensialet avtar lineært og er maks. på plata.

b) E. Det oppgitte potensialet betyr at det elektriske feltet er $\vec{E}_y = -\frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{\mathbf{j}} = -V_0/a\,\hat{\mathbf{j}}$ slik at energien per volumenhet er $u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 V_0^2/a^2$. Det oppgitte området har volum a^3, slik at den elektriske energien i dette området blir $U = u\,a^3 = \frac{1}{2}\epsilon_0 V_0^2 a$.

c) B. Må finne Q når feltet på overflata er 3,0 MV/m. Feltet på flata av ei kule med ladning Q og radius R er lik $E = Q/4\pi\epsilon_0 R^2$. Dette gir ei likning med en ukjent – og vi finner Q til å være 30 μC.

d) B. Vi vet at det elektriske feltet fra et stort ladd plan er uavhengig av avstanden fra planet. Altså er feltet mellom to slike plan også uavhengig av avstanden mellom de to planene. En økning i d endrer altså ikke den elektriske feltstyrken. De andre alternativene kan ikke være rette da: økning i $d \Rightarrow$ reduksjon i C, økning i V og økning i energi $E = \frac{1}{2}VQ$. (Energiøkningen fra tilført arbeid for å trekke platene fra hverandre, som tiltrekkes pga. motsatt ladning.)

e) C. Elektrisk flukstetthet $D = \sigma$ er lik gjennom hele volumet. $E = D/\epsilon_{\mathrm{r}}\epsilon_0$ er da størst når ϵ_{r} er minst (dvs. i luft 2). I metall er alltid $E = 0$ og derfor minst.

f) D. Elektrisk flukstetthet D og elektrisk felt E peker fra pos. til neg. ladning og mot fallende potensial. Potensialet må derfor falle gjennom hele volumet fra venstre mot høyre.

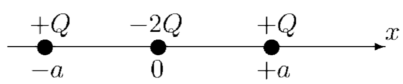
g) A. Bio-Savarts lov: $\vec{B} \propto q\vec{v} \times \vec{r}/r^3$. Høyrehåndsregelen og husk $q < 0$.

h) E. Retningen på magnetfeltet rundt den vertikale lederen er asimutalt i et horisontalt plan. Krafta på den horisontale lederen er null i det nærmeste punktet, og for alle andre punkter vil krafta på to punkter like langt fra dette midtpunktet kansellere med like stor i hver retning. Det vil derimot være et netto dreiemoment på lederen.

i) D. De rette ledere produserer ikke felt ved P da $I\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{r} = \vec{0}$. Den sirkulære delen gir et B-felt som går ned i papirplanet innenfor(nedenfor) halvsirkelen.

j) A. $H = IN/\ell = 3,0\,\mathrm{A} \cdot 350/0,15\,\mathrm{m} = 7000\,\mathrm{A/m}$. $B = (1 + \chi_{\mathrm{m}})\mu_0 H \approx \mu_0 H = 8,80\,\mathrm{mT}$.

Oppgave 2. Potensial og energi



a) Potensial rundt én punktladning i $x = 0$ er $V(x) = (4\pi\epsilon_0)^{-1}\frac{Q}{x} = k\frac{Q}{x}$. For disse tre punktladninger når $x > a$:

$$\underline{V(x) = k\left(\frac{Q}{x+a} + \frac{-2Q}{x} + \frac{Q}{x-a}\right)}$$

eller sammenfattet til én brøk:

$$V(x) = kQ\frac{x^2 - ax - 2(x^2 - a^2) + x^2 + xa}{x(x+a)(x-a)} = \underline{kQ\,\frac{2a^2}{x(x^2 - a^2)}}$$

b) Vi plasserer inn én og én ladning. Første ladning, la oss velge $-2Q$, plasseres inn gratis uten energi. Etter plasseringen er potensialet i $x = -a$ lik $k\dfrac{-2Q}{a}$. Potensial i et punkt er energi per ladning, slik at energi for å plassere inn påfølgende $+Q$ ved $x = -a$ blir $\left(k\dfrac{-2Q}{a}\right) \cdot Q = k\dfrac{-2Q^2}{a}$.

Når disse to ladningene er plassert er potensialet i $x = a$ lik $k\dfrac{-2Q}{a} + k\dfrac{Q}{2a} = -k\dfrac{3}{2}\dfrac{Q}{a}$ og energi for å plassere inn $+Q$ ved $x = -a$ er $\left(-k\dfrac{3}{2}\dfrac{Q}{a}\right) \cdot Q = -k\dfrac{3}{2}\dfrac{Q^2}{a}$.

Dermed er total energi
$$U = k\frac{-2Q^2}{a} - k\frac{3}{2}\frac{Q^2}{a} = \underline{-\frac{7}{2}k\frac{Q^2}{a}}.$$

Grunnen til at vi ikke bruker $U = \sum \frac{1}{2}V_i Q_i$, der V_i er potensialet i punktet som ladning Q_i ligger etter ladningen er oppbygd, er at vi ikke har funnet eksplisitt uttrykk for V_i.

Alternativt kan energien beregnes ved parvis sum over ladningene, men det var ikke akkurat denne metoden oppgaven spurte etter. NB ikke $\frac{1}{2}$ i følgende uttrykk:
$$U = k\left(\frac{Q\,(-2Q)}{a} + \frac{Q\,Q}{2a} + \frac{(-2Q)\,Q}{a}\right) = \underline{-\frac{7}{2}k\frac{Q^2}{a}}.$$

Oppgave 3. Kondensator

a) Sylindersymmetri betyr at det er kun $\hat{\mathbf{r}}$-komponenter og ingen ϕ eller z-avhengighet: $\vec{E} = E\,\hat{\mathbf{r}}$. Bruk av Gauss: $\iint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = E(r) \cdot 2\pi r \cdot h = Q_0/\epsilon_0$ gir
$$E = E(r) \quad = \quad \underline{\begin{cases} \dfrac{Q_0}{h\,2\pi\epsilon_0\,r} & \text{for} \qquad r \in [r_1, r_2] \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}} \tag{1}$$

b) Spenningen V_0 fra definisjonen av potensial:
$$V_0 = V_1 - V_2 = -\int_2^1 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_1^2 \frac{Q_0}{h\,2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\mathrm{d}r = \underline{\frac{Q_0}{h\,2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}}. \tag{2}$$

Herfra kan vi bestemme Q_0
$$Q_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 h V_0}{\ln r_2/r_1} = \frac{2\pi\epsilon_0 \cdot 0,50\,\mathrm{m} \cdot 200\,\mathrm{V}}{\ln 6/3} = 8,026\,\mathrm{nC} = \underline{8,0\,\mathrm{nC}}.$$

Kapasitansen blir
$$C_0 = \frac{Q_0}{V_0}\left(= \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln r_2/r_1}\right) = \frac{8,026\,\mathrm{nC}}{200\,\mathrm{V}} = 40,13\,\mathrm{pF} = \underline{40\,\mathrm{pF}}.$$

c) Totalladningen er konstant og lik Q_0, men fordeler seg med $Q_\mathrm{v} > Q_\ell$ (v=væske og ℓ=luft). Kondensatoren er som parallellkopling av to kondensatorer C_v og C_ℓ der $C_\ell = \frac{1}{2}C_0$ og $C_\mathrm{v} = \frac{1}{2}C_0 \cdot \epsilon_\mathrm{r}$ fordi de har samme høyde $h/2$ og samme radier. Fordi kondensatorene har samme spenning er ladningene
$$\frac{Q_\mathrm{v}}{Q_\ell} = \frac{C_\mathrm{v}}{C_\ell} = \epsilon_\mathrm{r} \qquad \text{som med } Q_\mathrm{v} + Q_\ell = Q_0 \text{ gir} \qquad Q_\mathrm{v} = Q_0\frac{\epsilon_\mathrm{r}}{\epsilon_\mathrm{r}+1}.$$

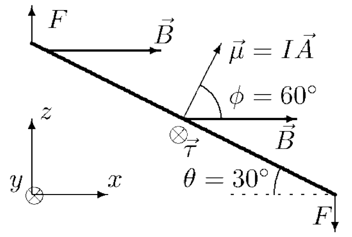
Det elektriske feltet ved væskeflata er $E_\mathrm{v}(r_1) = \dfrac{\sigma_\mathrm{v}(r_1)}{\epsilon_0\epsilon_\mathrm{r}} = \dfrac{Q_\mathrm{v}}{A_\mathrm{v}(r_1)\,\epsilon_0\epsilon_\mathrm{r}}$ som med $A_\mathrm{v}(r_1) = 2\pi r_1 h/2$ gir
$$E_\mathrm{v}(r_1) = \frac{Q_0\frac{\epsilon_\mathrm{r}}{\epsilon_\mathrm{r}+1}}{\pi r_1 h\,\epsilon_0\epsilon_\mathrm{r}} = \frac{8,026\,\mathrm{nC}}{\pi\epsilon_0 \cdot 0,03\,\mathrm{m} \cdot 0,50\,\mathrm{m}} \cdot \frac{1}{4+1} = 3847\,\mathrm{V/m} = \underline{3,8\,\mathrm{kV/m}}.$$

Alternativ løsning:
Totalladningen Q_0 uendra, som nå utgjøres av (v=væske og ℓ=luft):
$$Q_0 \quad = \quad Q_\mathrm{v} + Q_\ell = \sigma_\mathrm{v} \cdot A_\mathrm{v} + \sigma_\ell \cdot A_\ell = D_\mathrm{v} \cdot A_\mathrm{v} + D_\ell \cdot A_\ell,$$

der A_v og A_ℓ er areal for indre sylinder ved henholdsvis væske og luft. Når $h_\mathrm{v} = h_\ell = h/2$, må $A_\mathrm{v} = A_\ell = A/2 = \pi r_1 h$. Med $D_\ell(r_1) = \epsilon_0 E_\ell(r_1)$ og $D_\mathrm{v}(r_1) = \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0 E_\mathrm{v}(r_1)$ gir dette
$$Q_0 = \pi r_1 h\,\epsilon_0 E_\mathrm{v}(r_1)(\epsilon_\mathrm{r}+1) \quad \text{og gir som over} \quad E_\mathrm{v}(r_1) = \frac{Q_0}{\pi\epsilon_0 r_1 h} \cdot \frac{1}{\epsilon_\mathrm{r}+1}.$$

Oppgave 4. Magnetisme

a)



$$\Phi_B = \int_{\text{sløyfe}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = B \cos 60° A$$
$$= 1,50\,\mathrm{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,020\,\mathrm{m}^2 = 15 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Tm}^2 = \underline{15\,\mathrm{mWb}}.$$

Her er $A = ab$ er arealet av strømsløyfa og $\phi = 60° - \theta = 60°$ er vinkelen mellom B-feltet og flatenormalen $\vec{A}$. (OBS: Hold orden på 60° og 30° i oppstillingen!)

b) $\vec{\mu} = I\vec{A}$ der $\vec{A}$ er flatenormalen. Retningen altså langs flatenormalen, dvs. i xz-plan, 30° med z-aksen og 60° med x-aksen, med verdi

$$\underline{\mu = Iab = 5,00\,\mathrm{A} \cdot 0,020\,\mathrm{m}^2 = 0,100\,\mathrm{Am}^2}.$$

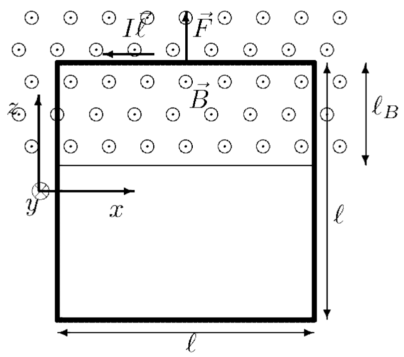
c) Kraftmomentet beregnes enklest fra $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ (oppgitt på formelark):

$$|\vec{\tau}| = \tau = \mu B \sin 60° = 0,10\,\mathrm{Am}^2 \cdot 1,5\,\mathrm{T} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,1299\,\mathrm{Am}^2 \cdot \mathrm{N/(Am)} = \underline{0,130\,\mathrm{Nm}},$$

med retning $\hat{\mathbf{j}}$ ifølge høyrehåndsregelen. Alternativt kan momentet beregnes fra arm x kraft for de to kortsidene, der krafta $F = IbB$ går i + og - z-retning (inntegnet i figuren) og effektiv arm er $a/2 \cdot \sin 60°$:

$$\vec{\tau} = 2 \cdot \vec{r} \times \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \tau = 2 \cdot a/2 \cdot IbB \cdot \sin 60° \qquad \text{(som over)}.$$

Oppgave 5. Induksjon



I figuren i oppgaveteksten er y-aksen tegnet opp av papirplan, men må gå ned i papirplan for å få et høyrehåndssystem (retta i figuren her). B-feltet opp av papirplan går derfor i $-y$-retning. Men det får ingen innvirkning på løsning av oppgaven:

a) Faradays induksjonslov når arealet endres:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -B\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}.$$

Her er $A = \ell_B\, \ell$ med ℓ_B = høyden av den delen av sløyfa som er innenfor det magnetiske feltet. Farten i $-z$ retning er $v = -\frac{\mathrm{d}\ell_B}{\mathrm{d}t}$. Dermed er indusert elektromotorisk spenning

$$\mathcal{E} = -B\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -B\frac{\mathrm{d}\ell_B}{\mathrm{d}t}\ell = \underline{Bv\ell}.$$

Fortegn (retning) diskuteres i neste punkt.

b) Ifølge Lenz' lov vil ems'en ha en retning som gir strøm I mot klokka (se figur). Da vil nemlig I produsere et B-felt i y-retning og motvirke reduksjonen av Φ_B pga. fallet. Dermed får følgende kraft retning oppover:

$$\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B} = \frac{\mathcal{E}}{R}\ell B\,\hat{\mathbf{k}} = \frac{Bv\ell}{R}\ell B\,\hat{\mathbf{k}} = \underline{\frac{B^2\ell^2}{R}v\,\hat{\mathbf{k}}}.$$

I $F = m\dfrac{v}{\tau}$ er derfor $\underline{\tau = \dfrac{Rm}{B^2\ell^2}}$.

c) I a) gitt at v er farten i $-z$-retning. Det er altså valgt positiv nedover for v, velger derfor akselerasjonen og krefter positive nedover. Magnetisk kraft F virker oppover og Newtons 2. lov for sløyfa gir $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - F$. Med oppgitt $F = m\dfrac{v}{\tau}$ gir dette

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - m\frac{v}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}t}{\tau}(g\tau - v) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{v - g\tau} = -\frac{\mathrm{d}t}{\tau}.$$

Integrasjon av denne fra $t = 0$ til generell t gir

$$\ln\frac{v(t) - \tau g}{-\tau g} = -\frac{t}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \underline{v(t) = \tau g\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}.$$

Dersom Newton 2 settes opp med positiv retning oppover: $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F - mg$ må du passe på at $F = -m\dfrac{v}{\tau}$ fordi v jo da er negativ og F skal være positiv. Svaret blir $v(t) = -\tau g\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$.

Kontroll startvilkår: $v(0) = 0$. Ser også at terminalfarten blir $v(\infty) = \tau g = \dfrac{Rmg}{B^2\ell^2}$.

Oppgave 6. Vekselstrømskrets.

a) Parallelkopling av impedanser: $\dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2} + \dfrac{1}{Z_3} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{i\omega L} + i\omega C$ gir:

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} + i\omega C} = \frac{Ri\omega L/i\omega C}{L/C + R/(i\omega C) + i\omega LR} = \frac{R}{1 + R\left(\frac{1}{i\omega L} + i\omega C\right)} = \underline{\frac{R}{1 + i\omega RC\left(-\frac{1}{\omega^2 LC} + 1\right)}}.$$

Dette er av form som oppgitt uttrykk

$$Z = \frac{A}{1 + i\omega\tau(1 - (\omega_0/\omega)^2)} \qquad \text{med} \qquad \underline{A = R, \quad \tau = RC, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}}.$$

b) Strømmen er $I(t) = V(t)/Z$ med komplekse størrelser. Strømamplituden er

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z|} = \frac{V_0}{A} \cdot \left|1 + i\omega\tau\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\right| = \frac{V_0}{A} \cdot \sqrt{1 + \omega^2\tau^2\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2}$$

som er minimum når uttrykket i rottegnet er minimum. Dette er minimum = 1 når siste ledd er null, som skjer når

$$\underline{\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}} \qquad \text{med} \qquad \underline{I_0(\omega_0) = \frac{V_0}{A} = \frac{V_0}{R}}.$$

Oppgave 7. Forskyvningsstrøm.

Total forskyvningsstrøm mellom platene er $I_\mathrm{d} = I = 2{,}52$ A retning nedover. Denne skaper magnetfelt ifølge Amperes lov på samme måte som ledningsstrøm:

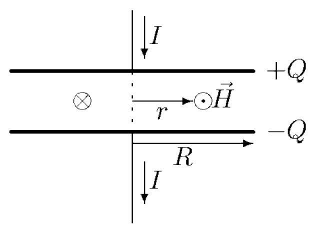
$$\oint H\mathrm{d}s = H\,2\pi r \equiv I_\mathrm{incl}.$$

Med homogent elektrisk felt mellom platene fordeler I_d seg med jamn strømtetthet, slik at strøm innenfor Amperekurva er

$$I_\mathrm{incl} = j \cdot A = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi r^2 = I\frac{r^2}{R^2} \quad \left(= \frac{I}{4}\right),$$

som gir

$$\begin{aligned} H(r) &= \frac{1}{2\pi}\frac{I_\mathrm{incl}}{r} = I\frac{r}{2\pi R^2} \\ H(1,00\,\mathrm{cm}) &= 2,52\,\mathrm{A} \cdot \frac{0,010\,\mathrm{m}}{2\pi\,(0,02\,\mathrm{m})^2} = 10,03\,\mathrm{A/m} = \underline{10,0\,\mathrm{A/m}}. \end{aligned}$$



Når forskyvningsstrømmen har retning nedover vil $\vec{H}$ etter høyrehåndsregelen (tommel i strømretning) ha retning asimutalt med klokka sett ovenfra, indikert i figuren.

I denne oppgaven var det veldig mange som glemte at I_incl er fordelt over hele tverrsnittet mellom platene. Dvs. de satt feilaktig $I_\mathrm{incl} = I$ og dermed **feil svar**

$$H(r) = \frac{1}{2\pi}\frac{I}{r} = \frac{2,52\,\mathrm{A}}{2\pi \cdot 0,02\,\mathrm{m}} = 40\,\mathrm{A/m}.$$

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 27. mai 15.