NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

LØSNINGSFORSLAG (4 sider):

EKSAMEN I TFY4155 ELEKTROMAGNETISME OG FY1003 ELEKTRISITET OG MAGNETISME

Mandag 31. mai 2010 kl. 0900 - 1300

Oppgave 1. Tolv flervalgsspørsmål (30 %)

a. D.

$$U = \frac{-e \cdot e}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{1.6 \cdot 10^{-9}}\ \text{eV} = -0.9\ \text{eV}$$

Eller, hvis en vet at svaret bør være av størrelsesorden en elektronvolt eller så, er det bare ett realistisk alternativ.

b. D. Bruker $E(x) = -dV/dx$.

c. C. Ingen polarisering i vakuum, men både $\vec{E}$ og $\vec{D}$ er forskjellig fra null i sjiktet med vakuum. ($\vec{D}$ er uniformt mellom de to metallplatene, mens $\vec{E}$ er sterkere i vakuumsjiktet enn i dielektrikumet.)

d. E. Total resistans i kretsen: $R + (1/R + 1/R)^{-1} = 3R/2$. Dermed: $I = V_0/(3R/2) = 2V_0/3R$.

e. B. Nedre gren, R i serie med parallellkoblingen av R og R, er identisk med kretsen i forrige oppgave. Den angitte strømmen må derfor være halvparten så stor som i forrige oppgave, dvs $V_0/3R$.

f. B. Med spenning V_0 påtrykt en kapasitans C blir ladningen $Q = V_0 C$.

g. C. Total kapasitans er $(1/C + 1/(C + 3C))^{-1} = 4C/5$, slik at total ladning til fordeling på de to parallellkoblede kapasitansene er $4V_0C/5$. Denne må fordele seg med 3/4 på kapasitansen $3C$, slik at $Q = 3V_0C/5$.

h. B. Sirkelbevegelsen forårsakes av Lorentzkraften, så vi må ha $evB_0 = m_e v^2/r$, med $v = |\vec{v}| = \sqrt{2}v_0$. Dermed er $r = \sqrt{2}m_e v_0/eB_0$.

i. E. Magnetisk dipolmoment er gitt ved produktet av strømstyrken og arealet av strømsløyfa. Uten å regne kan vi slå fast at arealet av en regulær sekskant med sidekanter 1.0 cm må være betydelig mer enn 1 cm^2, så kun svaret E er aktuelt.

j. C. $|Z_C| = 1/\omega C = 1/(10^6 \cdot 100 \cdot 10^{-9}) = 10\ \Omega$.

k. A. $|Z_L| = \omega L = 10^6 \cdot 100 \cdot 10^{-12} = 10^{-4}\ \Omega$, dvs 0.1 m$\Omega$.

l. A. Null likestrøm gjennom en kondensator gir umiddelbart $I_2 = I_4 = 0$, og dessuten $I_1 = I_3$. Kun svaret A er konsistent med dette. (Og det er jo heller ingen heksekunst å overbevise seg om at strømmen må bli $V_0/4R$ siden vi essensielt står igjen med 4 seriekoblede resistanser R.

Oppgave 1, svartabell:

Spørsmål:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Mitt svar:	D	D	C	E	B	B	C	B	E	C	A	A

<u>Oppgave 2.</u> (a 10 %, b 20 %)

<u>a</u>. *i*) Netto ladning: $-Q+2Q-Q=0$.
ii) Dipolmoment: $p=(-a)(-Q)+(a)(-Q)=0$.
iii)

$$V(x)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-Q}{x-a}+\frac{2Q}{x}+\frac{-Q}{x+a}\right)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{x-a}+\frac{2}{x}-\frac{1}{x+a}\right)$$

Dermed:

$$V(2a)=-\frac{Q}{12\pi\epsilon_0 a}$$

<u>b</u>. *i*) Null netto ladning her også.
ii) Små ladninger $\pm dq=\pm\lambda dx$ i innbyrdes avstand a bidrar med dipolmoment $d\vec{p}=\lambda a\,\hat{\mathbf{i}}\,dx$. Integrasjon gir totalt dipolmoment:

$$\vec{p}=\int d\vec{p}=\lambda a\,\hat{\mathbf{i}}\int_0^a dx=\lambda a^2\,\hat{\mathbf{i}}$$

iii) Vi bruker superposisjonsprinsippet. En liten positiv ladning $dq_+=\lambda dx'$ i posisjon $x'>0$ gir i posisjon x et bidrag

$$dV_+=\frac{\lambda dx'}{4\pi\epsilon_0(x-x')}.$$

Tilsvarende, for en liten negativ ladning $dq_-=-\lambda dx'$ i posisjon $x'<0$:

$$dV_-=-\frac{\lambda dx'}{4\pi\epsilon_0(x-x')}.$$

Dermed:

$$V(x)=-\int_{-a}^{0}\frac{\lambda dx'}{4\pi\epsilon_0(x-x')}+\int_0^a\frac{\lambda dx'}{4\pi\epsilon_0(x-x')}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\ln\frac{x}{x+a}+\ln\frac{x}{x-a}\right)=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\frac{x^2}{x^2-a^2}$$

iv) Når $x\gg a$ har vi

$$\ln\frac{x^2}{x^2-a^2}=-\ln(1-(a/x)^2)\simeq-(-(a/x)^2)=(a/x)^2,$$

slik at

$$V(x)\simeq\frac{\lambda a^2}{4\pi\epsilon_0 x^2},$$

som betyr at $n=2$ og $\alpha=\lambda a^2/4\pi\epsilon_0$.

<u>Oppgave 3.</u> (10 %)

Gauss' lov med kuleformet gaussflate gir, for $r<R$:

$$E(r)\cdot 4\pi r^2=\frac{1}{\epsilon_0}\int_0^r\rho_0(R/r)4\pi r^2dr=\frac{2\pi R\rho_0 r^2}{\epsilon_0},$$

dvs

$$E(r)=\frac{\rho_0 R}{2\epsilon_0}.$$

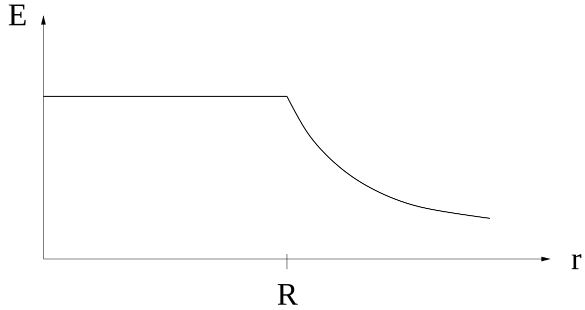
For $r>R$:

$$E(r)\cdot 4\pi r^2=\frac{1}{\epsilon_0}\int_0^R\rho_0(R/r)4\pi r^2dr=\frac{2\pi R^3\rho_0}{\epsilon_0},$$

dvs

$$E(r)=\frac{\rho_0 R^3}{2\epsilon_0 r^2}.$$

Skisse av $E(r)$:



Potensialforskjell mellom kulas sentrum og overflaten:

$$\Delta V = V(0) - V(R) = -\int_R^0 E(r)dr = E(r < R) \cdot R = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0}.$$

(Siden E er konstant inne i kula er det bare å gange feltstyrken med avstanden R.)

Oppgave 4. **(10 %)**

Etter tilkobling av spenningskilden ved $t = 0$ blir strømmen i gren 1 umiddelbart lik $I_1 = V_0/R$. Grenen til høyre vil imidlertid få en tidsavhengig strøm $I_2(t)$. Vi har en "standard" opplading av kondensator i en enkel RC-krets, med tilkobling av konstant spenningskilde V_0 ved $t = 0$. Tilstedeværelse av grenen med den ene resistansen har ingen betydning for RC-grenen. Spenningskilden leverer så mye strøm som hele kretsen "forlanger". (Den er ikke en leverandør av konstant strøm, men konstant spenning!)
Påtrykt spenning V_0 over gren 2 må være lik summen av spenningsfallene over kapasitansen, $V_C = Q/C$, og motstanden, $V_R = RI_2 = RdQ/dt$:

$$V_0 = \frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt}$$

(Alternativt: Summen av alle spenningsfall rundt den lukkede sløyfa må være lik null, $-V_0 + Q/C + RdQ/dt = 0$.)
Med initialbetingelsen (gitt i oppgaveteksten) $Q(0) = 0$ er løsningen

$$Q(t) = CV_0\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

som gir strømmen

$$I_2(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R}e^{-t/RC}$$

Dermed ser vi at strømmen umiddelbart etter tilkobling av V_0 blir

$$I_2(0) = \frac{V_0}{R}$$

og etter lang tid ($t \to \infty$)

$$I_2(\infty) = 0$$

Da kan vi regne ut total strøm levert av spenningskilden umiddelbart etter tilkobling,

$$I_0(0) = I_1 + I_2(0) = \frac{V_0}{R} + \frac{V_0}{R} = \frac{2V_0}{R}$$

og etter lang tid,

$$I_0(\infty) = I_1 + I_2(\infty) = \frac{V_0}{R} + 0 = \frac{V_0}{R}$$

Forholdet som skulle bestemmes blir følgelig

$$\frac{I_0(\infty)}{I_0(0)} = \frac{1}{2}$$

Oppgave 5. **(10 %)**

En hvilken som helst sirkulær amperekurve utenfor spolen, med sentrum på z–aksen, vil uansett omslutte en flate med *null netto* strøm gjennom: Enten går det slett ingen strøm gjennom den omsluttede flaten, eller så går det like mye opp gjennom flaten (NI) som ned (NI). Amperes lov gir da direkte $B = 0$ overalt utenfor spolen.

En sirkulær amperekurve inni spolen vil omslutte en flate som det passerer en strøm NI gjennom (ut av arket). Amperes lov gir da (siden amperekurven har lengden $2\pi r$):

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 NI,$$

dvs

$$B(r) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}.$$

Oppgave 6. **(10 %)**

Fra formellisten har vi at H–feltet rundt en uendelig lang og rett leder er $H(r) = I/2\pi r$. Magnetfeltet er dermed $B(r) = \mu_0 I/2\pi r$. Magnetisk fluks omsluttet av den rektangulære ledersløyfa blir

$$\Phi_B = \int\int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} c \int_a^{a+b} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I c}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}.$$

Med tidsavhengig I får vi en indusert elektromotorisk spenning

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \frac{dI}{dt},$$

som med den oppgitte $I(t)$ gir

$$\mathcal{E}(t) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 \alpha I_0 c}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} & 0 < t < 1/\alpha \\ 0 & t \geq 1/\alpha \end{cases}$$

Økende I mot høyre gir økende omsluttet magnetisk fluks ut av papirplanet. Indusert spenning $\mathcal{E}$ har da en retning slik at indusert strøm i sløyfa motvirker endringen i omsluttet magnetisk fluks. Indusert strøm må da gå *med klokka*.