

# Øving 4

## Elektrisk potensial og Gauss' lov.

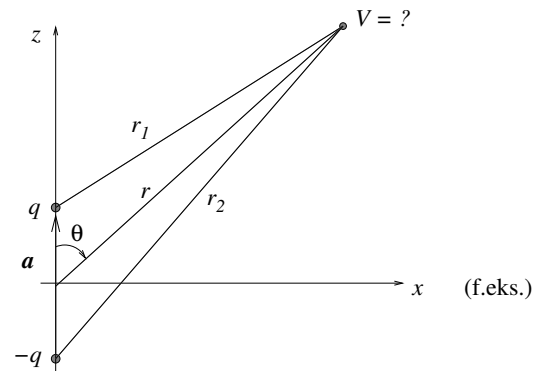
*Veiledning:* Mandag 6. feb. ifølge nettsider.

*Innlevering:* Tirsdag 7. feb. kl. 14:00

Lever øvinger i bokser utenfor R4.

### Oppgave 1. Potensial rundt elektrisk dipol.

En elektrisk dipol som består av to punkt-ladninger  $\pm q$ , er plassert langs  $z$ -aksen med sentrum i origo, som vist i figuren. Det elektriske *dipolmomentet* er da  $\vec{p} = q\vec{a}$ , der  $\vec{a} = a\hat{z}$  er vektoren fra  $-q$  til  $q$ .



Siden vi her opplagt må ha *symmetri* med hensyn til rotasjon omkring  $z$ -aksen, er det tilstrekkelig å se på forholdene i et halvplan som inneholder  $z$ -aksen, f.eks.  $xz$ -planet, med  $x > 0$ .

Vi kan videre velge mellom kartesiske koordinater  $(x, z)$  eller polarkoordinater  $(r, \theta)$  for å angi en vilkårlig posisjon i dette planet. Vi skal se på begge deler i denne oppgaven. For standard polarkoordinater er vinkelen  $\theta$  lik vinkelen som  $\vec{r}$  danner i forhold til  $z$ -aksen, som vist i figuren.

a) Bestem først sammenhengen mellom de kartesiske koordinatene og polarkoordinatene, dvs.  $x(r, \theta)$ ,  $z(r, \theta)$  og  $r(x, z)$ .

b) Vis at potensialet fra en slik dipol i kartesiske koordinater blir

$$V(x, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z - a/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z + a/2)^2}} \right).$$

c) Hva blir potensialet på  $x$ -aksen,  $V(x, 0)$ ?

d) Hva blir potensialet på  $z$ -aksen,  $V(0, z)$ ? (På *hele*  $z$ -aksen; pass på fortegnene!) Skisser<sup>1</sup> funksjonen  $V(0, z)$ .

e) Vis at i stor avstand fra dipolen (dvs  $r \gg a$ ) er potensialet med god tilnærmedelse<sup>2</sup> gitt i polarkoordinater ved

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

TIPS: Skriv om

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2},$$

og bruk figuren over til å finne et tilnærmet uttrykk for dette når  $r \gg a$ .

<sup>1</sup>Med skisse menes en håndtegnet figur som viser hovedtrekkene i funksjonen.

<sup>2</sup>For den som insisterer på en mer rigid matematisk tilnærming til denslags, er det her snakk om å bestemme  $V(r, \theta)$  "til ledende orden" i den "lille parameteren"  $a/r$ . Med andre ord, det oppgitte uttrykket for  $V(r, \theta)$  er *eksakt* for en såkalt *ideell dipol* med "null utstrekning" (dvs  $a \rightarrow 0$ ).

### Oppgave 2. To kuleskall.

To svært tynne, konsentriske, metalliske kuleskall har radier henholdsvis  $R$  og  $\frac{3}{2}R$ . Det indre skallet har ladningen  $q$ , og det ytre skallet har ladningen  $-3q$ .

- Finn uttrykk for det elektriske feltet  $\vec{E}(r)$  i alle deler av rommet.
- Hva er potensialdifferansen mellom skallene?
- Hvordan vil ladningen fordele seg dersom de to skallene forbindes med en tynn ledende tråd?

### Oppgave 3. Kule med gitt $Q(r)$ .

Ei kule med radius  $R$  har en ladningsfordeling slik at ladningen  $Q(r)$  innenfor radius  $r$  er gitt ved

$$Q(r) = 4\pi\rho_0 \left( \frac{4}{3}r^3 - \frac{1}{R}r^4 \right) \quad \text{for } r \leq R$$

Den totale ladningen for kula er således

$$Q_0 = Q(R) = \frac{4\pi}{3}R^3\rho_0,$$

hvor vi ser at  $\rho_0$  er gjennomsnittsverdien av  $\rho(r)$  i kula. Utenfor kula er det ladningsfritt.

- Bruk Gauss' lov ( $Q_{\text{encl}}$  gitt!) til å bestemme det elektriske feltet utenfor kula ( $r > R$ ) og inne i kula ( $r \leq R$ ).
- Bestem det elektriske potensialet  $V(r)$  utenfor kula og inne i kula. Sett referanse  $V(\infty) = 0$ .  
TIPS: Finn først  $V(r > R)$ . Uttrykk så integralet for  $V(r < R)$  med  $V(R)$ .  $V(r)$  må være kontinuerlig ved  $r = R$ .
- Finn uttrykk for romladningstettheten  $\rho(r)$  for  $r \leq R$ .
- Bruk et digitalt verktøy (f.eks. Python) til å vise grafer av  $\rho$ ,  $Q$ ,  $E$  og  $V$  for  $0 < r/R < 3/2$ .

Velg dimensjonsløse variable:  $\frac{\rho(r/R)}{4\rho_0}$ ,  $\frac{Q(r/R)}{\frac{4\pi\rho_0}{3}R^3}$ ,  $\frac{E(r/R)}{\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}R}$  og  $\frac{V(r/R)}{\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}R^2}$  og plott alle i én figur.

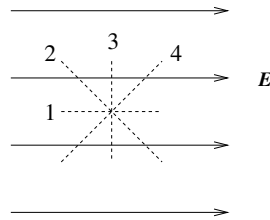
— forts. neste side

#### Oppgave 4. Flervalgsoppgaver.

(Eksamen vil ha minst 30% flervalgsoppgaver. Svar med et av alternativene A, B, C, D eller E.)

a) Figuren viser et uniformt elektrisk felt  $\vec{E}$  (heltrukne linjer). Langs hvilken stiplet linje endrer potensialet seg ikke?

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) Endrer seg langs alle linjer 1,2,3 og 4



b) En partikkel med negativ ladning plasseres med null starthastighet i et elektrostatisk felt  $\vec{E}$ . Partikkelens bevegelse blir

- A) i samme retning som  $\vec{E}$ .
- B) i retning normalt på  $\vec{E}$ .
- C) i retning høyere potensiell energi.
- D) i retning lavere potensiell energi.
- E) i retning lavere potensial.

c) Den potensielle energien til to elektroner i innbyrdes avstand 0,10 nm har verdi nærmest ( $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ )

- A) 29 eV
- B) 14 eV
- C) 14 meV
- D) 1,4 neV
- E)  $2,3 \cdot 10^{-18} \text{ eV}$ .

---

Utvalgte fasitsvar:

2b)  $-q/(12\pi\epsilon_0 R)$ ,

3a)  $E(r < R) = \frac{\rho_0 R}{3\epsilon_0} (4r/R - 3r^2/R^2)$ ,    3b)  $V(r < R) = \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0} \left[ 2 - 2r^2/R^2 + \frac{r^3}{R^3} \right]$ ,    3d)

$4\rho_0 \left( 1 - \frac{r}{R} \right)$ .