

## Øving 6

### Dipol. Platekondensatorer.

#### Oppgave 1. Potensial rundt dipol.

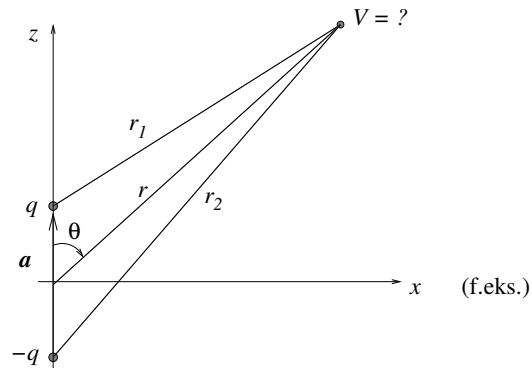
I en tidligere øving betraktet vi en elektrisk dipol, bestående av to punktladninger  $\pm q$  lokalisert på  $z$ -aksen i  $z = \pm a/2$ . Vi regnet ut det eksakte potensialet  $V_e(x, z)$  og fant

$$V_e(x, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z - a/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z + a/2)^2}} \right).$$

Deretter viste vi at potensialet i stor avstand fra dipolen ( $r \gg a$ ) blir tilnærmet lik (indeks  $a$  for "approximately")

$$V_a(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cos \theta}{r^2}.$$

Her er  $r$  avstanden fra origo, dvs dipolens midtpunkt, og  $\theta$  er vinkelen mellom  $z$ -aksen og  $\vec{r}$ . (Dipolmomentet er  $p = qa$ .)



Du skal visualisere dipolpotensialet og sammenligne det tilnærmede uttrykket  $V_a$  med det eksakte uttrykket  $V_e$ . Gjør dette ved å skrive et program i Python (evt. MatLab eller Octave) som regner ut differansen – eller kanskje like gjerne det prosentvise avviket  $\Delta = 100 \cdot |(V_e - V_a)/V_e|$  mellom det eksakte og det tilnærmede uttrykket gitt ovenfor – og som plottet  $V_e(x, z)$ ,  $V_a(x, z)$  og "feilen"  $\Delta(x, z)$  i tre forskjellige figurer.

#### NOEN TIPS OG KOMMENTARER:

- Skriv først om  $V_a(r, \theta)$  (i kulekoordinater) til  $V_a(x, z)$  (kartesiske koordinater).
- Det er mulig å plote potensialene i SI-enhet (V) som funksjon av  $x$  og  $z$  i en passende enhet. Men det er generelt mye mer praktisk å plote dimensjonsløse størrelser som funksjon av dimensjonsløse koordinater. Uttrykkene inneholder lengdeskalaen  $a$ , slik at det er naturlig å innføre de dimensjonsløse koordinater

$$\xi = x/a, \quad \eta = z/a.$$

Uttrykkene inneholder også ladningen  $q$  og  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , slik at det er naturlig å bruke potensial relativt til potensialet  $V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$  = potensial i avstand  $a$  fra en punktladning  $q$ . De dimensjonsløse potensial blir da

$$v_e = \frac{V_e}{V_0} = V_e \cdot \frac{4\pi\epsilon_0 a}{q}, \quad v_a = \frac{V_a}{V_0} = V_a \cdot \frac{4\pi\epsilon_0 a}{q}.$$

Dette gir de dimensjonsløse uttrykk  $v_e(\xi, \eta)$  og  $v_a(\xi, \eta)$ . Finn disse.

- Definer et fornuftig område i  $(x, z)$ -planet for plottene dine, f.eks.  $-2 < \xi < 2$  og  $-2 < \eta < 2$ .
- Det kan være lurt å begrense også "funksjonsaksen" i plottene dine, da potensialet blåser opp i nærheten av ladningene.
- Noen kommandoer og funksjoner som du kan få bruk for (Python):  
`arange`, `meshgrid`, `fig.add_subplot`, `ax.plot_surface`, `ax.set_zlim`, `ax.set_xlabel`, `show`.

## Oppgave 2. Sjekk av $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ .

Vi har i mange eksempler i forelesning (og i Y&F) funnet  $E$ -feltet til ulike ladningskonstellasjoner. Vi har også funnet potensialet  $V$  til de samme ladningskonstellasjoner. I de følgende er potensialet  $V$  oppgitt (fra Kap. 23). Beregn elektrisk felt fra  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$  og se om det stemmer med hva funnet i Kap. 21 eller Kap. 22. Du må i hvert tilfelle bruke et passende uttrykk for gradienten  $\vec{\nabla}$  fra formelarkets siste side. I det følgende refererer Eks. x til eksempel i forelesning.

a) På akse (midtnormalen) til ring med radius  $a$  og uniformt ladd  $Q$ . (Kap. 21 - Eks. 4 og Kap. 23 - Eks. 7)

$$V(x) = kQ \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

b) Inni kule med radius  $R$  og homogen romladning  $Q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$ . (Kap. 22 - Eks. 1 og Kap. 23 - Eks. 6)

$$V(r) = \frac{kQ}{2R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

c) Rundt rett, uendelig lang linjeladning  $\lambda$ . (Kap. 22 - Eks. 5 og Kap. 23 - Eks. 9)

$$V(r) - V(r_b) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_b}{r}.$$

d) I stor avstand fra dipol  $\vec{p} = q\vec{a}$  (Oppgave 1 i denne øvingen)

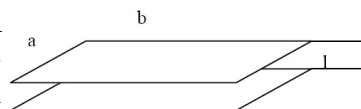
$$V_a(r, \theta) = k \frac{p \cos \theta}{r^2}.$$

$\vec{E}$  har  $r$  og  $\theta$ -komponent:  $\vec{E}(r, \theta) = E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta}$ , så du må bruke gradientoperator med  $\theta$ -avhengighet.

e) For dipolen i pkt d), diskuter om uttrykkene er fornuftige for  $\theta = 0$  og for  $\theta = \pi/2$ . Svaret for den siste har du i Øving 2 opg. 1. Hva med  $r = 0$ ?

## Oppgave 3. Platekondensator.

En parallelplatekondensator består av to rektangulære plater med sidekanter  $a = 10,0$  cm og  $b = 50$  cm. Avstanden mellom platene,  $\ell$ , kan varieres, og er i starten  $\ell = \ell_1 = 3,0$  mm og det er da luft mellom platene. Kondensatoren lades opp til en spenning  $V_1 = 300$  V. Vi antar at ladningen er uniformt fordelt på innsiden av platene og at vi kan se bort fra endeeffekter.



- Hva er den elektriske feltstyrken  $E$  mellom kondensatorplatene?
- Hva er den elektriske feltstyrken utenfor (over og under) kondensatorplatene? Begrunn svaret!
- Hva er kondensatorens kapasitans  $C$ ?

Forbindelsen til spenningskilden brytes etter at kondensatoren er ladd. Avstanden mellom kondensatorplatene økes til  $\ell = \ell_2 = 6,0$  mm for akkurat å gi plass til en plate av dielektrisk materiale av samme tykkelse. Det dielektriske materialet fyller hele hulrommet mellom kondensatorplatene. Spenningen på kondensatoren måles nå til 1/10 (10%) av den opprinnelige spenningen.

d) Bestem relativ permittivitet (dielektrisitetetskonstant)  $\epsilon_r$  for materialet som settes inn i platekondensatoren.

*Tips:* Ladningen kan ikke endres når spenningskilden er frakopla.

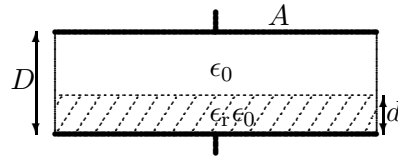
#### Oppgave 4. Seriekopling av kondensatorer.

a) Utled uttrykket for resultantkapasitansen  $C$  når to kondensatorer (med kapasitans  $C_1$  og  $C_2$ ) koples i serie.

b) En dielektrisk plate med tykkelse  $d$  og relativ permittivitet  $\epsilon_r$  puttes inn i en parallellplatekondensator med plateavstand  $D$  ( $d < D$ ). Arealet av alle plater er  $A$  og plateavstandene er små i forhold til arealet. Hva blir kapasitansen til den nye kondensatoren?

*Tips:* Seriekopling.

c) Vi måler kapasitansen for den nye kondensatoren til å være 125 pF. Hva er den relative permittiviteten  $\epsilon_r$  til plata når  $A = 300 \text{ cm}^2$ ,  $d = 1,25 \text{ mm}$  og  $D = 3,00 \text{ mm}$ ?



---

Utvalgte fasitsvar:

3c) 0,15 nF,    3d) 20;    4c) 3,34.