1

70540 HØST 87 LØSNING

OPPGAVE 1

a) Ladningen Q er jevnt fordelt over en kule med radius R. Det betyr at ladningstettheten ρ er gitt av

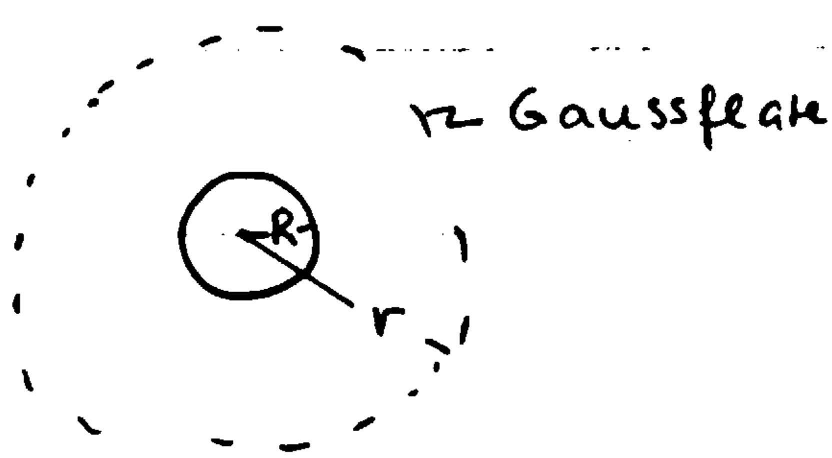
$$\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = Q$$

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

b) Vi anvender Gauss sats

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{u}_n \, dA = \frac{q_{inne}}{\epsilon_0}$$

For $r > R$ er $q_{INNE} = Q$. På grunn av symmetrien er E en konstant dersom vi velger en kuleflate med sentrum i origo (kulas sentrum) som Gaussflate. Dette gir da:



$$E(r) \int dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

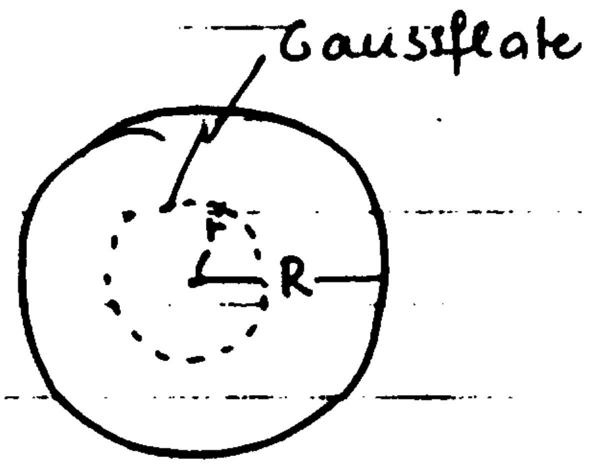
$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = Q/\epsilon_0$$

$$\bar{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r}$$

Dette er det samme som feltet fra en punktladning i origo. Potensialet blir derfor det samme som Coulomb-potensialet

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

c)



I det tilfelle at $r < R$ må vi først beregne q_{INNE}, d.v.s. ladningen innenfor Gaussflata

$$q_{INNE} = \rho \cdot (\text{vol innenfor Gaussfl})$$
$$= \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{3Q}{4\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$= Q\,\frac{r^3}{R^3}$$

Feltet blir da gitt av

$$\int \vec{E}\,\vec{u}_n\,dA = E\int dA = \frac{q_{INNE}}{\varepsilon_0} = \frac{Q \cdot r^3/R^3}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,\frac{r^3}{R^3}$$

Feltstyrken blir derfor

$$\underline{\underline{\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{R^3}}}\ \hat{r}$$

Potensialet finnes ved nå ved integrasjon

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}(r)\, d\vec{r} = -\int_{\infty}^{R} E(r)\,dr - \int_{R}^{r} E(r)\,dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - \int_{R}^{r} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\, r\, dr$$

$$\underline{\underline{= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\cdot\frac{1}{2}(r^2 - R^2)}}$$

$$\underline{\underline{= \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}\frac{r^2}{R^3}}}$$

d) Feltet kan finnes ved å superponere feltet fra en kule med jevnt fordelt ladningstetthet ρ plus en ny kule / kavitet med ladnings-tetthet $-\rho$ og radius a. Dette gir totalt null ladnings-tetthet i kaviteten. Den totale ladning på den lille kula blir $-Q\,a^3/R^3$. Feltet er alle steder lik summen av feltene fra de to ladningsfordelingene. Feltet i sentrum av kaviteten er lik feltet fra den jevnt fordelte ladningen på den store kula som beregnet i c) pluss feltet fra ladningen $-Q\,a^3/R^3$. Fra c) ses at feltet i sentrum av en jevnt ladet kule er null. Dette gir

$$\vec{E} = \vec{E}_Q + \underbrace{\vec{E}_{-Qa^3/R^3}}_{0 \text{ i sentrum av Kavitet}}$$

$$\underline{\underline{\vec{E} = \vec{E}_Q}}$$

ɔ: feltet i sentrum av kaviteten er det samme som før vi fjernet ladning.

) Feltvektorene fra de to ladningsfordelingene er parallelle på aksen. Feltet utenfor en kule er beregnet i c). Vi får

$$\underline{\vec{E}_P} = \vec{E} + \vec{E}_{-Qa^3/R^3} = \underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{(a/R)^3}{(r-b)^2}\right)\hat{r}}$$

OPPGAVE 2

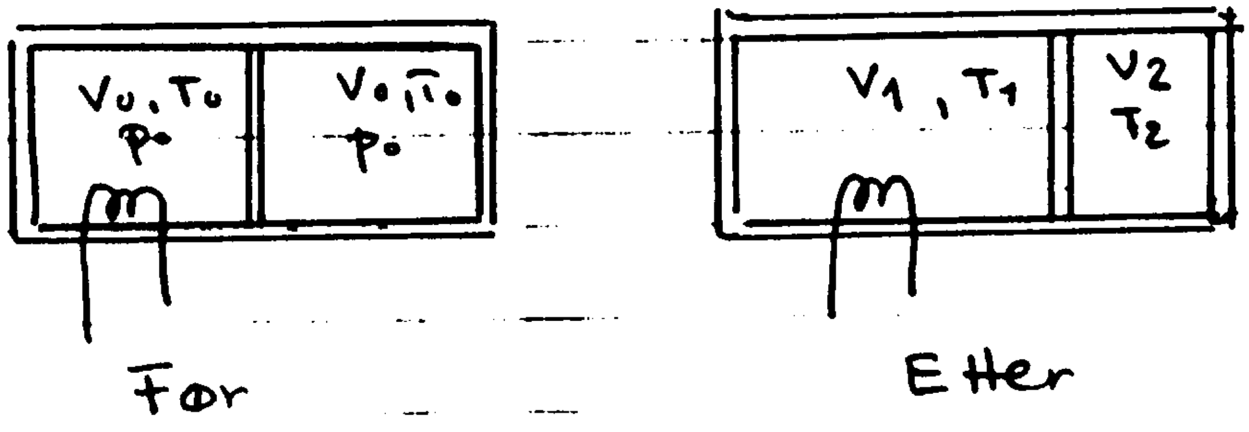
a) For toatomige gasser har en typisk $(3+2)\,R/2$ for et mol. Videre er $C_p - C_v = R$

$$\Rightarrow \quad C_p = \frac{5}{2}R + R = \frac{7}{2}R$$

Dette gir

$$\gamma = \frac{7/2\,R}{5/2\,R} = 1.4$$

b)



Prosessen i høyre kammer er adiabatisk. Vi har derfor

$$p_2 V_2^{\gamma} = p_0 V_0^{\gamma}$$

$$V_2 = V_0\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{1/\gamma} = V_0\left(\frac{8}{27}\right)^{2/3} = V_0 \cdot \frac{4}{9}$$

Temperaturen finnes nå av

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1}$$

$$\underline{\underline{T_2}} = T_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1} = T_0 \left(\frac{9}{4}\right)^{0.5} = \underline{\underline{\frac{3}{2} T_0}}$$

For venstre kammer har vi nå

$$p_1 = 27/8\, p_0 \qquad V_1 = \left(1 + \frac{5}{9}\right) V_0$$

$$= \frac{14}{9} V_0$$

Dette gir

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{T_1}$$

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{p_0 V_0} T_0 = 27/8 \cdot 14/9 \cdot T_0$$

$$\underline{\underline{T_1 = \frac{21}{4} T_0}}$$

c) Energitilførselen er lik arbeidet pluss endring i indre energi. Arbeidene i de to kamrene opphever hverandre slik at total energitilførsel er lik endring i indre energi. For en ideell gass er indre energi gitt av $U = n \cdot C_V T$

Arbeidet som gjøres på gassen i høyre volum W_e er gitt av $dQ = 0 \Rightarrow dU = nC_v dT = dW = -dW_e$

$$\Rightarrow W_e = nC_v \left(\tfrac{3}{2}T_0 - T_0\right) = \underline{\underline{6169\ \mathrm{J}}}$$

Dette gir for totalvarmen:

$$Q = \Delta U = nC_v\left(\frac{21}{4}T_0 - T_0\right) + nC_v\left(\frac{3}{2}T_0 - T_0\right)$$

$$= nC_v \frac{19}{4} T_0$$

Med $n = 2$ og $T_0 = 298\ \mathrm{K}$ fås

$$Q = 2 \cdot \frac{19}{4} \cdot 20.7 \cdot 298$$

$$\underline{\underline{Q = 58602\ \mathrm{J}}}$$

OPPGAVE 3

a) Kuleformen medfører minimalt areal i forhold til volumet. Dette betyr minst varmetap.

b) Vi har symmetri og isotropi rundt origo. Varmestrømmen totalt må være uavhengig av r ved stasjonære forhold

$$\Rightarrow J_{TOT} = j(r) \cdot 4\pi r^2 = \text{Konst} = C$$

$$j(r) = \frac{C}{4\pi r^2}$$

Fouriers lov kan derfor skrives

$$\frac{dT}{dr} = \frac{c_1}{r^2}$$

Integrerer vi denne fås

$$T(r) = -\frac{c_1}{r} + c_2$$

Grensebetingelsene er
$$T(r_1) = T_1$$
$$T(r_2) = T_2$$

Benytter vi dette til å finne c_1 og c_2 fås

$$T(r) = T_2 + \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Siden $j(r) = -\lambda \frac{dT}{dr}$, så er

$$J_{TOT} = j(r)\, 4\pi r^2$$
$$= 4\pi r^2 \cdot (-\lambda) \frac{dT}{dr}$$

Fra løsningen ovenfor fås ved derivasjon

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \cdot \frac{1}{r^2}$$

og $$J_{TOT} = 4\pi\lambda\left(\frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}\right)$$

Innsatt tallverdier fås:

$$\underline{\underline{J_{TOT} = 1836.7\,kW}}$$

c) Det vil komme bidrag fra tre transportmekanismer, varmeledning i luft, stråling og konveksjon. Varmeledningen avtar når avstanden mellom skallene øker mens konveksjonen øker og går mot en konstant verdi. Konveksjons-bidraget går mot null ved forsvinnende luftgap. Strålingsbidraget er uavhengig av avstanden.

d) Ved stasjonære forhold må vi ha

$$J_u = A_1 \epsilon \sigma T_1^4 + (1-\epsilon) J_i$$

$$J_i = A_2 \epsilon \sigma T_2^4 + (1-\epsilon) J_u$$

$$A_1 = 4\pi r_1^2 \qquad A_2 = 4\pi r_2^2$$

$$\Rightarrow \quad J = J_u - J_i$$

$$= 4\pi \frac{\epsilon\sigma}{2-\epsilon} \left(r_1^2 T_1^4 - r_2^2 T_2^4 \right)$$

Innsatt tallverdier fås:

$$\underline{\underline{J = 10.38 \text{ KW}}}$$

Dette er betydelig mindre enn svaret under b). Nå må det likevel tilføyes at inklusjon av varmeovergangsmotstanden ved ytterflaten ville redusere svaret under b) betydelig. På den annen side vil den samme overgangsmotstanden også komme inn under c) og redusere tapet her også