INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK
UNIVERSITETET I TRONDHEIM-NTH

Eksamen i

fag 71516 TEORETISK FYSIKK IC – EL.MAGN.TEORI

Tirsdag 31. mai 1977

kl. 0900-1600

Tillatte hjelpemidler: Kompendium i elektromagnetisk teori våren 1974 ved José González.
Øvingsoppgaver med løsninger våren 1977.

Oppgave 1

a) Et system med tidsuavhengig strømtetthet $\vec{j}(\vec{r})$ med $\vec{j}(\vec{r})=\vec{0}$ utenfor volumet V har et magnetisk skalarpotensial $\Psi(\vec{r})$ utenfor V, dvs at

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\,\mathrm{grad}\,\Psi(\vec{r}) \qquad \text{for} \qquad \vec{r} \notin V \,.$$

Hvorfor?

Det oppgis at for $\vec{r} \notin V$

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{\mu_0}{2\ell+1} M_{\ell m} Y_{\ell m}(\Omega)\, r^{-(\ell+1)} \,,$$

der de magnetiske multipolmomenter $M_{\ell m}$ er definert ved

$$M_{\ell m} = -\frac{1}{\ell+1} \int_V d^3r'\; r'^{\ell} Y^*_{\ell m}(\Omega')\; \mathrm{div}[\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] \,.$$

$\Omega \equiv (\vartheta,\varphi)$ er en forkortelse for vinklene ϑ,φ i sfæriske koordinater og

$$d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi \,.$$

Finn sammenhengen mellom M_{1-1}, M_{10}, M_{11} og det magnetiske dipolmoment $\vec{m}$.

b. En kuleflate som har konstant flateladningstetthet dreier seg med konstant vinkelhastighet $\vec{\omega}$ om en akse som går gjennom kulens sentrum. Bestem systemets magnetiske moment $\vec{m}$.

c. Bruk del a) for å beregne den magnetiske induksjon $\vec{B}(\vec{r})$ utenfor den roterende kuleflate fra del b).

*

Oppgave 2

Anta at en punktladnings elektriske feltstyrke var gitt ved den modifiserte Coulombs lov

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^{3+\delta}}$$

der $0<\delta<<1$ og $\vec{r}$ er avstandsvektoren fra punktladningen q .

a) Beregn div $\vec{E}$ og curl $\vec{E}$ for $\vec{r} \neq \vec{0}$ og vis at det finnes et elektrisk potensial.

b) Finn det elektriske potensial til en kuleflate som er jevnt ladet med ladninger hvis elektriske feltstyrke følger den modifiserte Coulombs lov ovenfor.

Det anbefales å bruke infinitesimale ringer som flateelementer og å bruke variabeltransformasjonen

$$\zeta^2 = R^2+r^2-2Rr\cos\vartheta$$

der R er kulens radius.

Vis at resultatet blir (σ = flateladningstettheten)

i) for $r<R$:

$$\varphi_R(r) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 r}\left\{(R+r)[1-\delta\ln(R+r)]-(R-r)[1-\delta\ln(R-r)]\right\} + \mathcal{O}(\delta^2) \quad ,$$

ii) for $r>R$:

$$\varphi_R(r) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 r}\left\{(R+r)[1-\delta\ln(R+r)]-(r-R)[1-\delta\ln(r-R)]\right\} + \mathcal{O}(\delta^2) \quad .$$

c) To konsentriske ledende kuleoverflater med radier a og b ($a>b$) forbindes ved en tråd. Den ytre kuleoverflate har ladningen q_a . Beregn den indre kuleoverflatens ladning q_b .

Bruk resultatene fra del b) for å vise at

$$q_b = A\delta + \mathcal{O}(\delta^2)$$

og bestem A. Foreslå en presis test for Čoulombs lov.

*

Oppgave 3

Gitt et system av atomer der elektronene (N elektroner pr. volumenhet) oscillerer med egenfrekvensen ω_0 og dempningsfaktor Γ i et ytre felt $\vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}$. Regn ut polarisasjonsvektoren som $\vec{P} = Ne_0\vec{r}$, der e_0 er elektronets ladning og $\vec{r}$ er et elektrons relativkoordinat (avstanden fra hvileposisjonen). Beregn den komplekse brytningsindeksen $n(\omega)$ under forutsetning av at $|n(\omega)-1| \ll 1$. Vis at $n(\omega)$ er analytisk for $\mathrm{Im}\,\omega \geq 0$ og at $n(\omega) \to 1$ for $\omega \to \infty$. Utled dispersjonsrelasjonen

$$\mathrm{Re}\, n(\omega)-1 = \frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_0^\infty d\nu\, \frac{\nu\, \mathrm{Im}\, n(\nu)}{\nu^2-\omega^2} .$$

Hvilken fysikalsk betydning har denne dispersjonsrelasjonen?

*

Bruk resultatene fra del b) for å vise at

$$q_b = A\delta + \mathcal{O}(\delta^2)$$

og bestem A. Foreslå en presis test for Čoulombs lov.

*

Oppgave 3

Gitt et system av atomer der elektronene (N elektroner pr. volumenhet) oscillerer med egenfrekvensen ω_0 og dempningsfaktor Γ i et ytre felt $\vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}$. Regn ut polarisasjonsvektoren som $\vec{P} = Ne_0\vec{r}$, der e_0 er elektronets ladning og $\vec{r}$ er et elektrons relativkoordinat (avstanden fra hvileposisjonen). Beregn den komplekse brytningsindeksen $n(\omega)$ under forutsetning av at $|n(\omega)-1| \ll 1$. Vis at $n(\omega)$ er analytisk for $\mathrm{Im}\,\omega \geq 0$ og at $n(\omega) \to 1$ for $\omega \to \infty$. Utled dispersjonsrelasjonen

$$\mathrm{Re}\, n(\omega)-1 = \frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_0^\infty d\nu\, \frac{\nu\, \mathrm{Im}\, n(\nu)}{\nu^2-\omega^2} .$$

Hvilken fysikalsk betydning har denne dispersjonsrelasjonen?

*