Kontinuasjonseksamen i

fag 71516 Elektromagnetisk teori

Torsdag 27.august 1981

kl.0900-1400

Tillatte hjelpemidler: K.Rottmann: Mathematische Formelsammlung, regnestav/lommekalkulator.

Oppgave 1

Maxwells likninger i et materielt media lyder

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{div } \vec{D} = \rho \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\text{curl } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \text{div } \vec{B} = 0 \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

a) Innfør de elektromagnetiske potensialene Φ og $\vec{A}$ og finn de differensiallikningene de må oppfylle.
Definer Lorentz-betingelsen og vis at den gir ukoblete likninger for Φ og $\vec{A}$. (ε og μ antas konstante).

b) Vis at loven om ladningsbevarelse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

følger fra Maxwells likninger.

c) Angi grensebetingelsene for feltstyrkene på grenseflaten mellom to dielektriske media når det ikke er frie ladninger på denne flaten.

Oppgave 2

a) Vis at dersom det foreligger rotasjonssymmetri om z-aksen, så kan den generelle løsning av Laplaces likning utvikles etter kulefunksjonene slik

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{A_\ell}{r^{\ell+1}} + B_\ell r^\ell \right) P_\ell(\cos\theta)$$

Oppgave 2 forts.

b) Bruk dette til å vise at det elektrostatiske potensialet både inne i og utenfor en nøytral ikke-ledende dielektrisk kule med radius R og relativ permitivitet ε_r som er plassert i et opprinnelig homogent elektrisk felt $\vec{E} = E_0\hat{e}_z$, vil være av formen

$$\Phi(\vec{r}) = \left(\frac{A}{r^2} + Br\right)\cos\theta \qquad \text{(origo i kulens sentrum)}$$

og bestem A og B's verdier utenfor og inne i kulen.

Oppgitt: I kulekoordinater er:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$$\text{grad}\ \Phi = \left\{\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right\}$$

$P_0(\cos\theta) = 1$

$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$

$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$

<u>Oppgave 3</u>

De retarderte potensialene er i Lorentz-gauge gitt ved

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r'$$

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho\left(\vec{r}\,',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r'$$

Anta at strømmene og ladningene, som alle er lokalisert i et endelig volum med største utstrekning lik d , svinger med en frekvens ω_0

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}_\omega(\vec{r})\,e^{-i\omega_0 t} \quad , \qquad \rho(\vec{r},t) = \rho_\omega(\vec{r})\,e^{-i\omega_0 t}$$

Oppgave 3 forts.

a) Hvilken sammenheng mellom j_ω og ρ_ω gir kontinuitetslikningen for ladninger?

b) Vis at vektorpotensialet da også har den samme form

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega_0 t}$$

hvor for store avstander fra strømmene $(r \gg d)$

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{e^{ikr}}{r}\int \vec{j}_\omega(\vec{r}\,')\, e^{-i\vec{k}\vec{r}\,'}\, d^3r', \left(\vec{k} = \frac{\omega}{c}\hat{n} \quad , \quad \hat{n} = \frac{\vec{r}}{r}\right)$$

c) Vis ved hjelp av dette og Lorentzbetingelsen at feltstyrkene i bølgesonen blir

$$\vec{B}_\omega(\vec{r}) = i[\vec{k}\times\vec{A}_\omega]$$

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = i\omega[[\hat{n}\times\vec{A}_\omega]\times\hat{n}]$$

og finn Poyntingvektoren uttrykt ved $\vec{A}_\omega$.

d) En senderantenne er formet som en sirkulær strømsløyfe med radius R . Den fører en vekselstrøm langs tråden av formen

$$I = I_0 \cos \omega t \qquad I_0 = \text{konstant} .$$

Benytt kontinuitetslikningen til å vise at det ikke er noen varierende ladninger på tråden og beregn sløyfens elektriske og magnetiske dipolmoment

$$\vec{D}_\omega^{(el)} = \int \vec{r}\, \rho_\omega(\vec{r})\, d^3r$$

$$\vec{D}_\omega^{(mag)} = \tfrac{1}{2}\int [\vec{r}\times\vec{j}_\omega(\vec{r})]\, d^3r$$

e) For strømsløyfen vår blir utstrålt effekt for lange bølgelengder $(\lambda \gg d)$ til laveste orden i $\frac{d}{\lambda}$ bestemt av det magnetiske dipolmoment:

$$P(\omega_0, \hat{n}) = \frac{\mu_0 \omega^2}{8\pi^2 c}\left|\frac{\omega}{c}\left[\hat{n}\times\left[\vec{D}_\omega^{(mag)}\times\hat{n}\right]\right]\right|^2$$

Finn denne vinkelfordelingen og finn også den totale utstrålte effekt i alle retninger $P(\omega_0)$.