

Faglig kontakt under eksamen:  
F. aman. Kåre Olaussen  
Tlf. 3652

**KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG 71527 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK**  
Mandag 24. august 1987  
Tid: kl. 0900-1500

Tillatte hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator  
Rottmann: Mathematische Formelsammlung

Oppgave I.

Vi skal i denne oppgaven se litt på formuleringen av kvante-elektrodynamikk med massive fotoner.

1. Skriv ut følgende kovariante uttrykk mer eksplisitt ved tids- ( $A^0, \partial_0 = \partial/\partial t$ ) og rom-komponenter ( $A^i, \partial_i = \partial/\partial x^i$ ):

i)  $C_1 = A_\mu A^\mu$

ii)  $C_2 = j_\mu A^\mu$

iii)  $C_3 = (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)$

iv)  $C_4 = (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu)$

2. Lagrange-tettheten for massiv elektrodynamikk koblet til en strøm  $j^\mu$  er gitt som

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - j_\mu A^\mu$$

der  $m$  er fotonets masse (målt i naturlige enheter  $\hbar = c = 1$ ).

Bruk resultatene fra foregående punkt til å vise at dette utskrevet eksplisitt ved tids- og rom-komponenter blir lik

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_0 A^1)(\partial_0 A^1) + (\partial_0 A^1)(\partial_1 A^0) + \frac{1}{2}(\partial_1 A^0)(\partial_1 A^0) - \frac{1}{2}(\partial_1 A^j)(\partial_1 A^j - \partial_j A^1) \\ + \frac{1}{2}m^2(A^0 A^0 - A^1 A^1) - j^0 A^0 + j^1 A^1 \quad .$$

3. Finn fra overstående uttrykk de kanonisk konjugerte impulstetthetene

$$\Pi_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^0)} \quad , \quad \Pi_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^1)} \quad .$$

4. Benytt Euler-Lagrange ligningene

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} \quad , \quad \nu = 0, 1$$

til å finne bevegelsesligningene for  $A^0$  og  $A^1$ .

5. (Teknisk intermezzo)

i) Finn et symbolsk uttrykk for  $G^{ij}$  slik at

$$G^{ij} [(-\Delta + m^2)\delta_{jk} + \partial_j \partial_k] = \delta_k^i \quad .$$

Her er  $\Delta = \partial_i \partial_i = -\partial^1 \partial_1$ .

Tips: Prøv med en ansatz av formen  $G^{ij} = A\delta^{ij} + B\partial^i \partial^j$ , og bestem A og B. Symbolsk løsning betyr at du f.eks kan skrive løsningen av ligningen  $C(-\Delta + m^2) = 1$  som  $C = (-\Delta + m^2)^{-1}$ .

ii) Løs ligningen

$$[(-\Delta + m^2)\delta_{jk} + \partial_j \partial_k] f^k = (-\Delta + m^2)g_j + (\partial_j h)$$

med hensyn på  $f^k$ .

6. I en kanonisk formulering ønsker man å eliminere de tidsderiverte  $\partial_0 A^i$  til fordel for de kanoniske impulstetthetene  $\Pi_i$ . Finn  $\partial_0 A^i$  uttrykt  $\Pi_i$  og  $j^0$ .

Tips: Operer med  $-\Delta + m^2$  på uttrykket for  $\Pi_i$ , og eliminer  $A^0$  fra dette uttrykket ved bruk av Euler-Lagrange ligningen for  $A^0$ . Benytt så resultatene fra pkt.5.

Oppgave II.

1. Tegn Feynmandiagrammene for de laveste ordens ikke-forsvinnende bidrag til spredningsamplituden  $T_{fi}$  for følgende prosesser (Feynmanregler er oppgitt i vedlegget):

i)  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

ii)  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$

iii)  $e^+ \mu^- \rightarrow e^+ \mu^- \gamma$

iv)  $\gamma \gamma \rightarrow \gamma \gamma$

2. Se spesielt på prosessen  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ , og tegn alle Feynmandiagrammene for neste ordens korreksjoner til  $T_{fi}$ .

3. Benytt Feynmanreglene i vedlegget til å skrive ned det algebraiske uttrykket for  $T_{fi}$  (til laveste orden) for prosessen  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ .

4. For å finne det upolariserte spredningstverrsnittet fra overstående amplitude må man bl.a. beregne følgende spor over  $\gamma$ -matriser:

i)  $S_1 = \text{Tr} [(\not{p}_1 + m)\gamma_\mu (\not{p}'_1 + m)\gamma_\nu (\not{p}'_1 + m)\gamma^\nu (\not{p}_1 + m)\gamma^\mu]$

ii)  $S_2 = \text{Tr} [(\not{p}_1 + m)\gamma_\mu (\not{p}'_1 + m)\gamma_\nu (\not{p}'_1 + m)\gamma^\mu (\not{p}_1 + m)\gamma^\nu]$

Finn disse sporene uttrykt ved invariante skalarprodukter. Du kan eventuelt forenkle uttrykkene ved å benytte at  $p_1^2 = p_1'^2 = m^2$ .

5. For den aktuelle prosessen har vi følgende kinematiske relasjoner

$$q = p_1 + p_2 \quad , \quad q' = p_1 - p_2' \quad , \quad p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$$

$$p_2^2 = p_2'^2 = 0 \quad , \quad p_1^2 = p_1'^2 = m^2.$$

Bruk disse relasjonene til å forenkle uttrykkene for  $S_1$  og  $S_2$  ytterligere. Uttrykk svarene ved  $s = q^2$ ,  $u = q'^2$  og  $m^2$ .

**VEDLEGG TIL EKSAMEN I FAG 71527 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK**

Noen av de nedenforstående opplysningene kan muligens være til nytte ved eksamensbesvarelsen.

**I. Sammenhengen mellom spredningstverrsnitt og amplitude**

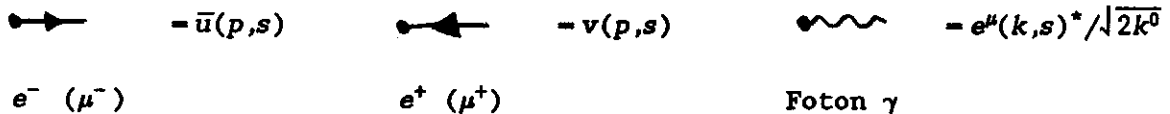
For en 2-partikkel → 2-partikkel kollisjonsprosess i massesentersystemet er sammenhengen mellom differensielt spredningstverrsnitt  $d\sigma$  og spredningsamplitude  $T_{fi}$  gitt ved

$$d^2\sigma = \frac{1}{(p_1^0 + p_2^0)^2} \frac{p'}{p} (p_1^0 p_2^0 p_1'^0 p_2'^0) |T_{fi}|^2 \frac{d^2\Omega}{(2\pi)^2},$$

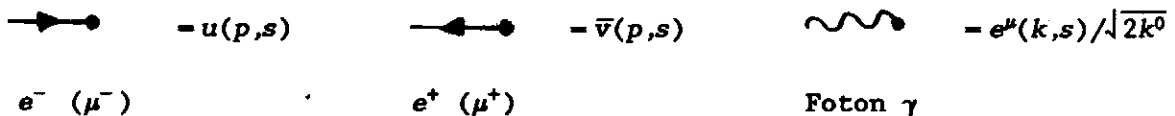
(der  $p = |\vec{p}_1|$ ,  $p' = |\vec{p}_1'|$ ) når man bruker normering og Feynmanregler for  $T_{fi}$  som under.

**II. Feynmanregler for kvante-elektrodynamikk**

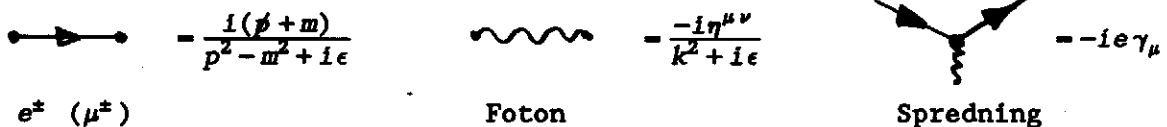
**1. Utgående linjer:**



**2. Innkommende linjer:**



**3. Propagatorer og knuter:**



### III. Komplette løsningssett for Dirac ligningen

#### 1. Standard planbølgeløsninger:

$$u(p,1) = N(p) \begin{pmatrix} \cosh y/2 \\ -\sinh y/2 \end{pmatrix} w_-(p), \quad u(p,2) = N(p) \begin{pmatrix} \cosh y/2 \\ \sinh y/2 \end{pmatrix} w_+(p)$$

$$v(p,1) = N(p) \begin{pmatrix} \sinh y/2 \\ \cosh y/2 \end{pmatrix} w_+(p), \quad v(p,2) = N(p) \begin{pmatrix} \sinh y/2 \\ -\cosh y/2 \end{pmatrix} w_-(p),$$

der  $\cosh y = p^0$ ,  $N(p) = [2 \cosh y/2]^{-1/2}$  og  $[\hat{p} \cdot \vec{\sigma}] w_{\pm}(p) = \pm w_{\pm}(p)$ , dvs.

$$w_+ = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 e^{-i\phi/2} \\ \sin \theta/2 e^{+i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad w_- = \begin{pmatrix} \sin \theta/2 e^{-i\phi/2} \\ -\cos \theta/2 e^{+i\phi/2} \end{pmatrix},$$

når  $p^x = \cos \theta$  og  $p^x \pm i p^y = \sin \theta e^{\pm i\phi}$ .

#### 2. Fullstendighetsrelasjoner:

$$\sum_{s=1}^2 u(p,s)_\alpha \bar{u}(p,s)_\beta = \frac{(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{2p^0}, \quad \sum_{s=1}^2 v(p,s)_\alpha \bar{v}(p,s)_\beta = \frac{(\not{p} - m)_{\alpha\beta}}{2p^0}$$

### IV. Relasjoner for $\gamma$ -matrisene

1. Eksplisitte representasjoner, med Pauli-matrisene  $\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  og  $\sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ :

i) Standard-representasjonen:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

ii) Weyl-representasjonen:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

#### 2. Algebraiske relasjoner:

$$i) (\gamma^\mu, \gamma^\nu) = \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \quad ii) \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma^\mu = -2\gamma_\lambda \quad iii) \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\sigma \gamma^\mu = 4\eta_{\lambda\sigma}$$

$$iv) \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\sigma \gamma_\rho \gamma^\mu = -2\gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\lambda \quad v) \gamma^0 \gamma_\mu^\dagger \gamma^0 = \gamma_\mu$$

#### 3. Noen spor av gamma-matriser:

$$i) \text{Tr } 1 = 4 \quad ii) \text{Tr } \gamma_\mu = 0 \quad iii) \text{Tr } \gamma_\mu \gamma_\nu = 4\eta_{\mu\nu} \quad iv) \text{Tr } \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda = 0$$

$$v) \text{Tr } \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\sigma = 4(\eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\sigma} - \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\lambda})$$