UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
F.aman. Kåre Olaussen
Tlf. 3652

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG 71527 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK
Mandag 24. august 1987
Tid: kl. 0900-1500

Tillatte hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator
Rottmann: Mathematische Formelsammlung

Oppgave I.

Vi skal i denne oppgaven se litt på formuleringen av kvante-elektrodynamikk med massive fotoner.

1. Skriv ut følgende kovariante uttrykk mer eksplisitt ved tids- $(A^0, \partial_0 = \partial/\partial t)$ og rom-komponenter $(A^i, \partial_i = \partial/\partial x^i)$:

   i) $C_1 = A_\mu A^\mu$

   ii) $C_2 = j_\mu A^\mu$

   iii) $C_3 = (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)$

   iv) $C_4 = (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu)$

2. Lagrange-tettheten for massiv elektrodynamikk koblet til en strøm j^μ er gitt som

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - j_\mu A^\mu \quad ,$$

der m er fotonets masse (målt i naturlige enheter $\hbar = c = 1$).

Bruk resultatene fra foregående punkt til å vise at dette utskrevet eksplisitt ved tids- og rom-komponenter blir lik

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_0 A^i)(\partial_0 A^i) + (\partial_0 A^i)(\partial_i A^0) + \frac{1}{2}(\partial_i A^0)(\partial_i A^0) - \frac{1}{2}(\partial_i A^j)(\partial_i A^j - \partial_j A^i)$$
$$+ \frac{1}{2}m^2(A^0A^0 - A^iA^i) - j^0A^0 + j^iA^i \quad .$$

3. Finn fra overstående uttrykk de kanonisk konjugerte impulstetthetene

$$\Pi_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^0)} \quad , \quad \Pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^i)} \quad .$$

4. Benytt Euler-Lagrange ligningene

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} \quad , \nu = 0, i$$

til å finne bevegelseligningene for A^0 og A^i.

5. (Teknisk intermezzo)

i) Finn et symbolsk uttrykk for G^{ij} slik at

$$G^{ij}\,[(-\Delta + m^2)\delta_{jk} + \partial_j\partial_k] = \delta^i_k \quad .$$

Her er $\Delta = \partial_i\partial_i = -\partial^i\partial_i$.

Tips: Prøv med en ansatz av formen $G^{ij} = A\delta^{ij} + B\partial^i\partial^j$, og bestem A og B. Symbolsk løsning betyr at du f.eks kan skrive løsningen av ligningen $C(-\Delta + m^2) = 1$ som $C = (-\Delta + m^2)^{-1}$.

ii) Løs ligningen

$$[(-\Delta + m^2)\delta_{jk} + \partial_j\partial_k]f^k = (-\Delta + m^2)g_j + (\partial_j h)$$

med hensyn på f^k.

6. I en kanonisk formulering ønsker man å eliminere de tidsderiverte $\partial_0 A^i$ til fordel for de kanoniske impulstetthetene Π_i. Finn $\partial_0 A^i$ uttrykt Π_i og j^0.

Tips: Operer med $-\Delta + m^2$ på uttrykket for Π_i, og eliminer A^0 fra dette uttrykket ved bruk av Euler-Lagrange ligningen for A^0. Benytt så resultatene fra pkt.5.

Oppgave II.

1. Tegn Feynmandiagrammene for de laveste ordens ikke-forsvinnende bidrag til spredningsamplituden T_{fi} for følgende prosesser (Feynmanregler er oppgitt i vedlegget):

 i) $e^- \mu^- \to e^- \mu^-$

 ii) $e^- \gamma \to e^- \gamma$

 iii) $e^+ \mu^- \to e^+ \mu^- \gamma$

 iv) $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$

2. Se spesielt på prosessen $e^- \mu^- \to e^- \mu^-$, og tegn alle Feynmandiagrammene for neste ordens korreksjoner til T_{fi}.

3. Benytt Feynmanreglene i vedlegget til å skrive ned det algebraiske uttrykket for T_{fi} (til laveste orden) for prosessen $e^- \gamma \to e^- \gamma$.

4. For å finne det upolariserte spredningstverrsnittet fra overstående amplitude må man bl.a. beregne følgende spor over γ-matriser:

 i) $S_1 = \mathrm{Tr}\,[(\not p_1 + m)\gamma_\mu (\not q + m)\gamma_\nu (\not p_1' + m)\gamma^\nu (\not q + m)\gamma^\mu]$

 ii) $S_2 = \mathrm{Tr}\,[(\not p_1 + m)\gamma_\mu (\not q + m)\gamma_\nu (\not p_1' + m)\gamma^\mu (\not q' + m)\gamma^\nu]$

 Finn disse sporene uttrykt ved invariante skalarprodukter. Du kan eventuelt forenkle uttrykkene ved å benytte at $p_1^2 = p_1'^2 = m^2$.

5. For den aktuelle prosessen har vi følgende kinematiske relasjoner

$$q = p_1 + p_2 \quad , \quad q' = p_1 - p_2' \quad , \quad p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$$

$$p_2^2 = p_2'^2 = 0 \quad , \quad p_1^2 = p_1'^2 = m^2 .$$

 Bruk disse relasjonene til å forenkle uttrykkene for S_1 og S_2 ytterligere. Uttrykk svarene ved $s = q^2$, $u = q'^2$ og m^2.

VEDLEGG TIL EKSAMEN I FAG 71527 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Noen av de nedenforstående opplysningene kan muligens være til nytte ved eksamensbesvarelsen.

I. Sammenhengen mellom spredningstverrsnitt og amplitude

For en 2-partikkel → 2-partikkel kollisjonsprosess i massesentersystemet er sammenhengen mellom differensielt spredningstverrsnitt $d\sigma$ og spredningsamplitude T_{fi} gitt ved

$$d^2\sigma = \frac{1}{(p_1^0+p_2^0)^2}\,\frac{p'}{p}\,(p_1^0 p_2^0 p_1'^0 p_2'^0)\,|\,T_{fi}\,|^2\,\frac{d^2\Omega}{(2\pi)^2},$$

(der $p = |\vec{p}_1|$, $p' = |\vec{p}_1'|$) når man bruker normering og Feynmanregler for T_{fi} som under.

II. Feynmanregler for kvante-elektrodynamikk

1. Utgående linjer:

 $=\bar{u}(p,s)$  $=v(p,s)$  $=e^{\mu}(k,s)^*/\sqrt{2k^0}$

e^- (μ^-) e^+ (μ^+) Foton γ

2. Innkommende linjer:

 $=u(p,s)$  $=\bar{v}(p,s)$  $=e^{\mu}(k,s)/\sqrt{2k^0}$

e^- (μ^-) e^+ (μ^+) Foton γ

3. Propagatorer og knuter:

 $=\dfrac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}$  $=\dfrac{-i\eta^{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}$  $=-ie\gamma_\mu$

$e^{\pm}$ $(\mu^{\pm})$ Foton Spredning

III. Komplett løsningssett for Diraclignigen

1. Standard planbølgeløsninger:

$$u(p,1) = N(p)\begin{pmatrix}\cosh y/2 \\ -\sinh y/2\end{pmatrix} w_-(\hat{p}) \;,\; u(p,2) = N(p)\begin{pmatrix}\cosh y/2 \\ \sinh y/2\end{pmatrix} w_+(\hat{p})$$

$$v(p,1) = N(p)\begin{pmatrix}\sinh y/2 \\ \cosh y/2\end{pmatrix} w_+(\hat{p}) \;,\; v(p,2) = N(p)\begin{pmatrix}\sinh y/2 \\ -\cosh y/2\end{pmatrix} w_-(\hat{p}) \,,$$

der $\cosh y = p^0$, $N(p) = [2\cosh y/2]^{-1/2}$ og $[\hat{p}\cdot\vec{\sigma}]w_\pm(\hat{p}) = \pm w_\pm(\hat{p})$, dvs.

$$w_+ = \begin{bmatrix}\cos\theta/2\, e^{-i\phi/2} \\ \sin\theta/2\, e^{+i\phi/2}\end{bmatrix} \;,\; w_- = \begin{bmatrix}\sin\theta/2\, e^{-i\phi/2} \\ -\cos\theta/2\, e^{+i\phi/2}\end{bmatrix} \,,$$

når $\hat{p}^z = \cos\theta$ og $\hat{p}^x \pm i\hat{p}^y = \sin\theta\, e^{\pm i\phi}$.

2. Fullstendighetsrelasjoner:

$$\sum_{s=1}^{2} u(p,s)_\alpha \bar{u}(p,s)_\beta = \frac{(\not{p}+m)_{\alpha\beta}}{2p^0} \,,\; \sum_{s=1}^{2} v(p,s)_\alpha \bar{v}(p,s)_\beta = \frac{(\not{p}-m)_{\alpha\beta}}{2p^0}$$

IV. Relasjoner for γ-matrisene

1. Eksplisitte representasjoner, med Pauli-matrisene $\sigma^x = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\sigma^y = \begin{pmatrix}0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix}$ og $\sigma^z = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$:

i) Standard-representasjonen:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix}I & 0 \\ 0 & -I\end{pmatrix} \,,\; \vec{\gamma} = \begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0\end{pmatrix} \,,\; \vec{\alpha} = \gamma^0\vec{\gamma} = \begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0\end{pmatrix} \,,\; \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix}I & 0 \\ 0 & -I\end{pmatrix} \,.$$

ii) Weyl- representasjonen:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix}0 & I \\ I & 0\end{pmatrix} \,,\; \vec{\gamma} = \begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0\end{pmatrix} \,,\; \vec{\alpha} = \gamma^0\vec{\gamma} = \begin{pmatrix}-\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\end{pmatrix} \,,\; \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix}0 & I \\ I & 0\end{pmatrix} \,.$$

2. Algebraiske relasjoner:

i) $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}$ ii) $\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma^\mu = -2\gamma_\lambda$ iii) $\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\gamma^\mu = 4\eta_{\lambda\sigma}$

iv) $\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\gamma_\rho\gamma^\mu = -2\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\lambda$ v) $\gamma^0\gamma_\mu^\dagger\gamma^0 = \gamma_\mu$

3. Noen spor av gamma-matriser:

i) $\mathrm{Tr}\, 1 = 4$ ii) $\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu = 0$ iii) $\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\gamma_\nu = 4\eta_{\mu\nu}$ iv) $\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda = 0$

v) $\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma = 4(\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\sigma} - \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\lambda})$