UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
F.aman. Kåre Olaussen
Tlf. 3652

EKSAMEN I FAG 71527 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK
Mandag 25. mai 1987
Tid: kl. 0900-1500

Tillatte hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator tillatt

Oppgave I.

Vi skal i denne oppgaven se på 2-partikkel → 2-partikkel kollisjonsprosesser. Vi begynner med å se på det generelle tilfellet der innkommende partikler med firer-impulser p_1, p_2 og masser m_1, m_2 går over til utgående partikler med firer-impulser p'_1, p'_2 og masser m'_1, m'_2.

1. Mandelstam-invariantene

   i) Definer Mandelstam-invariantene s, t og u for denne prosessen, og vis hvordan skalarproduktene $2p_1 \cdot p'_1$, $2p_1 \cdot p_2$, $2p_1 \cdot p'_2$, $2p'_1 \cdot p_2$, $2p'_1 \cdot p'_2$ og $2p_2 \cdot p'_2$ kan uttrykkes ved s, t, u og massene til de involverte partiklene.

   ii) Vis at $s+t+u$ bare avhenger av massene til de involverte partiklene (bruk konservering av firer-impuls).

2. Massesenter-systemet er definert ved at $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$.

   i) Finn $p = |\vec{p}_1|$ og $p' = |\vec{p}'_1|$ uttrykt ved s og massene til de involverte partiklene i dette systemet.

   ii) Finn sammenhengen mellom t og spredningsvinkelen $\cos\theta$ (og størrelsene over) i dette systemet.

3. Laboratorie-systemet (for partikkel "m_2") er definert ved at $\vec{p}_2 = \vec{0}$.

   i) Finn sammenhengen mellom s og energien $E = p_1^0$ til partikkel "m_1" (og massene) i dette systemet.

   ii) Finn i dette systemet t uttrykt ved energioverføringen $\Delta E = p_1^0 - p_1'^0$ og massene til de involverte partiklene. Tips: Bruk impulskonservering. Dersom du ikke får til dette punktet kan du i det følgende anta en relasjon av formen $t = a + b\Delta E$.

   iii) Finn den maksimale energioverføringen ΔE_{max} uttrykt ved E og massene til de involverte partiklene.

4. Bruk resultatene fra pkt. 2. og 3. til å finne sammenhengen mellom de differensielle tverrsnittene $\frac{d\sigma}{d\cos\theta}(s,t)$, $\frac{d\sigma}{dt}(s,t)$ og $\frac{d\sigma}{d\Delta E}(s,t)$.

5. Tegn Feynmandiagrammene for laveste ordens bidrag til spredningsamplituden T_{fi} for følgende prosesser (Feynmanregler er oppgitt i vedlegget):

   i) $e^- \mu^- \to e^- \mu^-$

   ii) $e^- \mu^+ \to e^- \mu^+$

   iii) $e^+ \mu^- \to e^+ \mu^-$

   iv) $e^+ \mu^+ \to e^+ \mu^+$

   v) $e^- e^+ \to \mu^- \mu^+$

   vi) $\mu^- \mu^+ \to e^- e^+$

   vii) $e^- e^+ \to \gamma\gamma$

   iix) $e^- \gamma \to e^- \gamma$

   ix) $\gamma\gamma \to e^- e^+$

6. Se spesielt på prosessen $e^- \mu^+ \to e^- \mu^+$, og tegn alle Feynmandiagrammene for neste ordens korreksjoner (dvs. bidragene av orden e^4) til T_{fi}.

7. Bruk Feynmanreglene til å skrive ned det algebraiske uttrykket for T_{fi} til laveste orden for prosessene

   i) $e^- \mu^- \to e^- \mu^-$

   ii) $e^- \mu^+ \to e^- \mu^+$

8. Det upolariserte tverrsnittet $d\bar{\sigma}$ framkommer ved at vi midler over helisitetene s_1, s_2 til innkommende partikler, og summerer over helisitetene s_1', s_2' til utgående partikler. Vis at for de to prosessene i pkt.7 gjelder til laveste orden

$$\frac{d\bar{\sigma}^{e^-\mu^-\to e^-\mu^-}}{d\cos\theta} = \frac{d\bar{\sigma}^{e^-\mu^+\to e^-\mu^+}}{d\cos\theta}.$$

9. Finn tilslutt eksplisitt

$$\text{i)}\quad \frac{d\bar{\sigma}^{e^+\mu^-\to e^+\mu^-}}{dt} \qquad \text{ii)}\quad \frac{d\bar{\sigma}^{e^+\mu^+\to e^+\mu^+}}{d\Delta E}$$

Uttrykk svarene ved finstrukturkonstanten $\alpha = e^2/4\pi$.

Oppgave II.

Vi skal i denne oppgaven se litt på kvantiseringen av foton-feltet (i Feynman gauge). Lagrangetettheten for det elektromagnetiske felt koblet til en klassisk strøm j_μ er (i Feynman gauge) gitt som

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\nu)(\partial^\mu A_\nu) - j_\mu A^\mu$$

1. Klassisk analyse:

i) Skriv ut $\mathcal{L}$ uttrykt eksplisitt ved de rom- ($\vec{\nabla}$) og tidsderiverte ($\partial/\partial t$) av A^0 og $\vec{A}$.

ii) Finn de kanonisk konjugerte impulsene $\Pi_\mu = \Pi_{A^\mu}$.

iii) Vis at Hamiltontettheten H for dette systemet kan skrives på formen

$$\mathrm{H} = -\frac{1}{2}(\Pi_\mu \Pi^\mu + \vec{\nabla}A_\mu \cdot \vec{\nabla}A^\mu) + j_\mu A^\mu .$$

2. Vi kvantiserer nå systemet ved å postulere lik tid kommuteringsrelasjonen

$$[\Pi_\mu(\vec{r}), A^\nu(\vec{r}')] = -i\,\delta_\mu^\nu\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') = -i\,\eta_\mu^\nu\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') .$$

i) Anta at disse feltene kan skrives ut ved kreasjons- og annihilasjons-operatorer som

$$A_\mu(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\,\alpha(k)\,[a(k)_\mu\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a(k)_\mu^\dagger\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}]$$

$$\Pi_\mu(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\,\beta(k)\,[a(k)_\mu\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - a(k)_\mu^\dagger\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}] ,$$

der $[a(k)_\mu, a(k')_\nu^\dagger] = c_{\mu\nu}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')$, med alle andre kommutatorer lik null.

- Hvilke betingelser må $\alpha(k)$, $\beta(k)$ og $c_{\mu\nu}$ tilfredsstille for at kommuteringsrelasjonen mellom Π_μ og A_ν skal være oppfylt? Normaliser disse løsningene ved å forlange at $c_{33} = 1$.

ii) Sett nå først $j_\mu = 0$ og fastlegg koeffisientene i forrige pkt. fullstendig ved å kreve at Hamiltonfunksjonen $H = \int d^3r\, \mathrm{H}$ skal bli diagonalisert. (Dvs. skal kunne uttrykkes som et integral over antallsoperatorene $a(k)_0^\dagger a(k)_0$ og $a(k)_i^\dagger a(k)_i$.)

iii) La nå $j_\mu \neq 0$ igjen, og skriv ut den fullstendige Hamiltonfunksjonen ved de kreasjons- og annihilasjonsoperatorene du fant over.

iv) Finn nye kreasjons- og annihilasjonsoperatorer som diagonaliserer denne nye Hamiltonfunksjonen. Hvordan avhenger energien til grunntilstanden av strømmen j_μ?

VEDLEGG TIL EKSAMEN I FAG 71527 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Noen av nedenforstående opplysninger kan muligens være av nytte ved eksamensbesvarelsen.

I. Sammenhengen mellom spredningstverrsnitt og amplitude

For en 2-partikkel → 2-partikkel kollisjonsprosess i massesentersystemet er sammenhengen mellom differensielt spredingstverrsnitt $d\sigma$ og spredningsamplitude T_{fi} gitt ved

$$d^2\sigma = \frac{1}{(p_1^0+p_2^0)^2}\,\frac{p'}{p}\,(p_1^0p_2^0)^2\,|T_{fi}|^2\,\frac{d^2\Omega}{(2\pi)^2},$$

(der $p = |\vec{p}_1|$, $p' = |\vec{p}_1'|$) når man bruker normalisering og Feynmanregler for T_{fi} som under.

II. Feynmanregler for kvante-elektrodynamikk

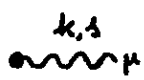
1. Utgående linjer:

$= u(p,s)$

e^- (μ^-)

$= \bar{v}(p,s)$

e^+ (μ^+)



$= e^\mu(k,s)^*/\sqrt{2k^0}$

Foton γ

2. Innkommende linjer:


$= \bar{u}(p,s)$

e^- (μ^-)

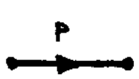

$= v(p,s)$

e^+ (μ^+)

$= e^\mu(k,s)/\sqrt{2k^0}$

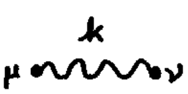
Foton γ

3. Propagatorer og knuter:



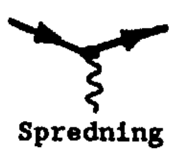
$= \frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}$

$e^\pm$ ($\mu^\pm$)



$= \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}$

Foton


$= -ie\gamma_\mu$

Spredning

III. Komplett løsningssett for Diracligningen

1. Standard planbølgeløsninger:

$$u(p,1) = N(p)\begin{pmatrix}\cosh y/2\\ -\sinh y/2\end{pmatrix} w_-(\hat{p}) \ , \ u(p,2) = N(p)\begin{pmatrix}\cosh y/2\\ \sinh y/2\end{pmatrix} w_+(\hat{p})$$

$$v(p,1) = N(p)\begin{pmatrix}\sinh y/2\\ \cosh y/2\end{pmatrix} w_+(\hat{p}) \ , \ v(p,2) = N(p)\begin{pmatrix}\sinh y/2\\ -\cosh y/2\end{pmatrix} w_-(\hat{p}) \ ,$$

der $\cosh y = p^0$, $N(p) = [2\cosh y/2]^{-1/2}$ og $[\hat{p}\cdot\vec{\sigma}]w_\pm(\hat{p}) = \pm w_\pm(\hat{p})$, dvs.

$$w_+ = \begin{bmatrix}\cos\theta/2\, e^{-i\phi/2}\\ \sin\theta/2\, e^{+i\phi/2}\end{bmatrix} \ , \ w_- = \begin{bmatrix}\sin\theta/2\, e^{-i\phi/2}\\ -\cos\theta/2\, e^{+i\phi/2}\end{bmatrix} \ ,$$

når $\hat{p}^z = \cos\theta$ og $\hat{p}^x \pm i\hat{p}^y = \sin\theta\, e^{\pm i\phi}$.

2. Fullstendighetsrelasjoner:

$$\sum_{s=1}^{2} u(p,s)_\alpha \bar{u}(p,s)_\beta = \frac{(\not p + m)_{\alpha\beta}}{2p^0} \ , \ \sum_{s=1}^{2} v(p,s)_\alpha \bar{v}(p,s)_\beta = \frac{(\not p - m)_{\alpha\beta}}{2p^0}$$

IV. Relasjoner for γ-matrisene

1. Eksplisitte representasjoner, med Pauli-matrisene $\sigma^x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\sigma^y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$ og $\sigma^z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$:

i) Standard-representasjonen:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix} \ , \ \vec{\gamma} = \begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ -\vec{\sigma} & 0\end{pmatrix} \ , \ \vec{\alpha} = \gamma^0\vec{\gamma} = \begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & 0\end{pmatrix} \ , \ \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix} .$$

ii) Weyl- representasjonen:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix} \ , \ \vec{\gamma} = \begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ -\vec{\sigma} & 0\end{pmatrix} \ , \ \vec{\alpha} = \gamma^0\vec{\gamma} = \begin{pmatrix}-\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\end{pmatrix} \ , \ \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix} .$$

2. Algebraiske relasjoner:

i) $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}$ ii) $\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma^\mu = -2\gamma_\lambda$

iii) $\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\gamma^\mu = 4\eta_{\lambda\sigma}$ iv) $\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\gamma_\rho\gamma^\mu = -2\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\lambda$ v) $\gamma^0\gamma_\mu^\dagger\gamma^0 = \gamma_\mu$

3. Noen spor av gamma-matriser:

i) $\mathrm{Tr}\, 1 = 4$ ii) $\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu = 0$ iii) $\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\gamma_\nu = 4\eta_{\mu\nu}$

iv) $\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda = 0$ v) $\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma = 4(\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\sigma} - \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\lambda})$