

Faglig kontakt under eksamen:
F. aman. Kåre Olaussen
Tlf. 3652

EKSAMEN I FAG 71527 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Onsdag 25. mai 1988

Tid: kl. 0900-1500

Tillatte hjelpemidler (Alternativ B):

Godkjent lommekalkulator tillatt

Rottmann: Mathematische Formelsammlung

Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken

Oppgave I (Feynndiagrammer og spredningsprosesser).

1. Tegn der det er mulig Feynndiagrammene for laveste ordens QED-bidrag til spredningsamplituden M_{fi} for følgende prosesser (Feynmanregler er oppgitt i vedlegget):

i) $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$

ii) $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$

iii) $e^-e^- \rightarrow e^+e^+$

iv) $e^+\mu^- \rightarrow e^+\mu^-$

v) $e^+\mu^- \rightarrow e^-\mu^+$

vi) $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

vii) $\gamma e^- \rightarrow e^-\mu^+\mu^-$

viii) $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$

ix) $\gamma \rightarrow \gamma\gamma\gamma$

x) $\mu^- \rightarrow e^-\gamma$

2.

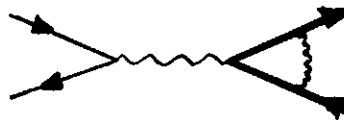
i) Tegn alle Feynmandiagrammene for laveste ordens QED-bidrag til prosessen $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma$.

ii) Velg et av disse diagrammene (angi hvilket) og skriv ut det algebraiske uttrykket for amplituden som er tilordnet dette diagrammet.

3. Se nå spesielt på prosessen $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$:

i) Tegn alle Feynmandiagrammene for neste ordens korreksjoner (dvs. bidragene av orden e^4) til M_{21} .

ii) Ett av disse diagrammene er



Skriv ut det algebraiske uttrykket for amplituden som er tilordnet dette diagrammet.

4. Beregn, i massesentersystemet og til laveste ikkeforsvinnende orden, det upolariserte tverrsnittet for prosessen $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$:

i) Skriv ned amplituden og uttrykk amplitudekvadratet, midlet over helisitetstilstandene til innkommende partikler og summert over helisitetstilstandene til utgående partikler, ved spor over γ -matriser.

ii) Beregn de aktuelle sporene og utfør kontraksjonene over firervektorindekser.

iii) Uttrykk det differensielle tverrsnittet $\frac{d\sigma}{d\cos\theta_{\text{CM}}}$ ved massesenterenergien $E_{\text{CM}} = \sqrt{s}$, spredningsvinkelen θ_{CM} (mellom innkommende e^- og utgående μ^-) samt massene m_e og m_μ .

iv) Bestem det totale tverrsnittet for prosessen, og skissér hvordan det varierer som funksjon av E_{CM} .

v) Vi går nå til elektronets laboratoriesystem, dvs. der $\vec{p}_e = 0$. Hva er der den laveste energien positronet må ha for at vi skal kunne få produsert et myon-par? Du kan her gjøre forenklingen $m_e \ll m_\mu$.

Oppgave II (Bogoliubov-transformasjoner).

Fourierframstillingen for et fritt reellt Klein-Gordon felt er

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{1}{2\omega(\vec{k})}} [a(\vec{k}) e^{-ikx} + a(\vec{k})^\dagger e^{ikx}] ,$$

$$\Pi_\varphi(x) = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega(\vec{k})}{2}} [a(\vec{k}) e^{-ikx} - a(\vec{k})^\dagger e^{ikx}] .$$

Her er egentlig kreasjons og annihilasjonsoperatorene avhengig av massen m til feltet, dvs. $a(\vec{k}) = a(\vec{k}; m)$, $a(\vec{k})^\dagger = a(\vec{k}; m)^\dagger$.

1. Finn sammenhengen mellom settene

$$(a(\vec{k}; m_0), a(-\vec{k}; m_0)^\dagger)$$

og

$$(a(\vec{k}; m_1), a(-\vec{k}; m_1)^\dagger) ,$$

når feltene $\varphi(x)$ og $\Pi_\varphi(x)$ er uforandret.

2. Finn et uttrykk for den midlere tetthet av " m_1 "-partikler i en " m_0 "-vakuumentilstand, dvs. redusér uttrykket

$$\rho(m_1; m_0) = {}_{m_0}\langle 0 | \frac{1}{V} \int d^3k a(\vec{k}; m_1)^\dagger a(\vec{k}; m_1) | 0 \rangle_{m_0} ,$$

til et éndimensjonalt integral, og avgjør om dette integralet er endelig eller ikke. Her er V er kvantiseringvolumet, og $|0\rangle_{m_0}$ er definert ved at

$$a(\vec{k}; m_0) |0\rangle_{m_0} = 0$$

for alle \vec{k} .

VEDLEGG TIL EKSAMEN I FAG 71527 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Noen av de nedenforstående opplysningene kan muligens være til nytte ved eksamensbesvarelsen.

I. Sammenhengen mellom spredningstverrsnitt og amplitude

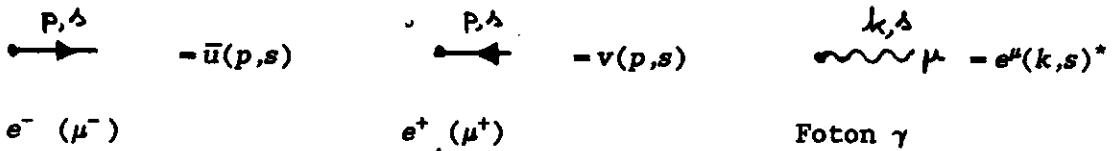
For en 2-partikkel \rightarrow 2-partikkel kollisjonsprosess i massesentersystemet er sammenhengen mellom differensielt spredningstverrsnitt $d\sigma$ og spredningsamplitude M_{fi} gitt ved

$$d^2\sigma = \frac{1}{16(p_1^0 + p_2^0)^2} \frac{p'}{p} |M_{fi}|^2 \frac{d^2\Omega}{(2\pi)^2},$$

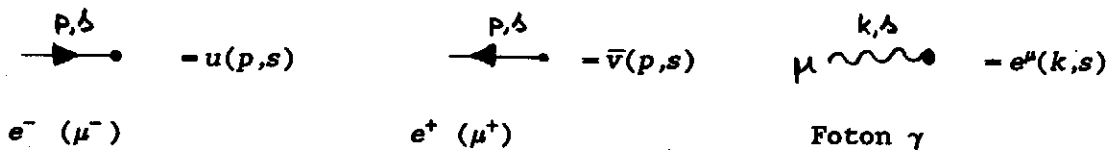
(der $p = |\vec{p}_1|$, $p' = |\vec{p}'_1|$) når man bruker normering og Feynmanregler for M_{fi} som under.

II. Feynmanregler for kvante-elektrodynamikk

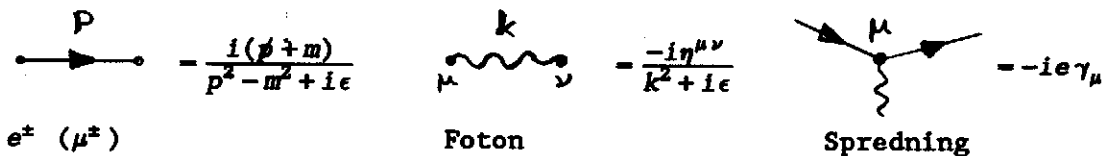
1. Utgående linjer:



2. Innkommende linjer:



3. Propagatorer og knuter:



4. Faktor $-i$ for å gå fra S -matrise til amplitude, faktor -1 for hver lukket fermion-sløyfe, relativ faktor -1 mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av ytre fermion-linjer.

5. $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ for hver 4-impuls som ikke er fiksert ved energi-impuls konservering.

III. Komplette løsningssett for Dirac ligningen

1. Standard planbølge løsninger:

$$u(p,1) = N \begin{bmatrix} \cosh y/2 \\ \sinh y/2 \end{bmatrix} w_+(\hat{p}), \quad u(p,2) = N \begin{bmatrix} \cosh y/2 \\ -\sinh y/2 \end{bmatrix} w_-(\hat{p})$$

$$v(p,1) = N \begin{bmatrix} \sinh y/2 \\ -\cosh y/2 \end{bmatrix} w_-(\hat{p}), \quad v(p,2) = N \begin{bmatrix} \sinh y/2 \\ \cosh y/2 \end{bmatrix} w_+(\hat{p}),$$

der $\sinh y = |\vec{p}|/m$, $N = (2m)^{1/2}$ og $[\hat{p} \cdot \vec{\sigma}] w_{\pm}(\hat{p}) = \pm w_{\pm}(\hat{p})$, dvs.

$$w_+ = \begin{bmatrix} \cos \theta/2 e^{-i\phi/2} \\ \sin \theta/2 e^{i\phi/2} \end{bmatrix}, \quad w_- = \begin{bmatrix} \sin \theta/2 e^{-i\phi/2} \\ -\cos \theta/2 e^{i\phi/2} \end{bmatrix},$$

når $\hat{p}^x = \cos \theta$ og $\hat{p}^x \pm i\hat{p}^y = \sin \theta e^{\pm i\phi}$.

2. Fullstendighetsrelasjoner:

$$\sum_{s=1}^2 u(p,s)_\alpha \bar{u}(p,s)_\beta = (\not{p} + m)_{\alpha\beta}, \quad \sum_{s=1}^2 v(p,s)_\alpha \bar{v}(p,s)_\beta = (\not{p} - m)_{\alpha\beta}$$

IV. Relasjoner for γ -matrisene

1. Eksplisitt representasjon (standard-representasjonen):

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \gamma^0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix},$$

der Pauli-matrisene er $\sigma^x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma^y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ og $\sigma^z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Algebraiske relasjoner:

$$\text{i) } (\gamma^\mu, \gamma^\nu) = \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \quad \text{ii) } \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma^\mu = -2\gamma_\lambda \quad \text{iii) } \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\sigma \gamma^\mu = 4\eta_{\lambda\sigma}$$

$$\text{iv) } \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\sigma \gamma_\rho \gamma^\mu = -2\gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\lambda \quad \text{v) } \gamma^0 \gamma_\mu^\dagger \gamma^0 = \gamma_\mu$$

3. Noen spor av gamma-matriser:

$$\text{i) } \text{Tr } 1 = 4 \quad \text{ii) } \text{Tr } \gamma_\mu = 0 \quad \text{iii) } \text{Tr } \gamma_\mu \gamma_\nu = 4\eta_{\mu\nu} \quad \text{iv) } \text{Tr } \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda = 0$$

$$\text{v) } \text{Tr } \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\sigma = 4(\eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\sigma} - \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\lambda})$$