

UNIVERSITETET I TRONDHEIM  
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE  
INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:  
F.aman F. Bakke  
Tlf. 3649

EKSAMEN I FAG 71550 KLASSISK FELTTEORI  
Torsdag 4.desember 1986  
kl.0900-1400

Tillatte hjelpe middler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung.  
Godkjent lommekalkulator tillatt.

Oppgave 1

- a) Vis hvordan en kan finne Maxwells likninger for det elektromagnetiske felt ut fra Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = - \frac{1}{4\mu_0} \mathcal{F}_{\alpha\beta} \mathcal{F}^{\alpha\beta} - j_\alpha A^\alpha$$

Her er  $\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  feltstyrkene

og  $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$  strømtettheten ( $\mu=0,1,2,3$ )

- b) Utled en energibevareleseslikning for det fri feltet (med kilde  $j^\mu=0$ ) og skriv opp den kanoniske energi-impulstensoren.
- c) Redegjør for hvordan en fra denne kan få den symmetriske energi-impulstensoren

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = - \frac{1}{\mu_0} \mathcal{F}^{\alpha\mu} \mathcal{F}_\alpha{}^\nu + g^{\mu\nu} \frac{1}{4\mu_0} \mathcal{F}_{\alpha\beta} \mathcal{F}^{\alpha\beta}$$

- d) En elektromagnetisk puls som er rotasjonssymmetrisk om z-aksen, har potensial gitt ved

$$A^\mu = A^\mu(\rho, z, t) \quad \text{med} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Regn ut dreieimpulsen om z-aksen  $J_z = \int [\vec{r} \times \vec{g}]_z d^3r$   
for en slik puls.

Feltets impulstetthet er uttrykt ved den symmetriske energiimpulstensor  $g^k = \frac{1}{c} \mathcal{J}^{ok}$

- e) Hva ville resultatet i d) blitt om en hadde benyttet den kanoniske energi-impulstensoren?
- f) Vis at resultatet i d) for dreieimpulsens z-komponent er gauge-invariant (ved gauge-transformasjonen  $A^\mu(\rho, z, t) \rightarrow A'^\mu(\rho, z, t) = A^\mu(\rho, z, t) - \partial^\mu \chi(\rho, z, t)$ ) selv om potensialet  $A^\mu$  inngår direkte i uttrykket for dreieimpulsen (Hint: Etter en partiell integrasjon kan  $\phi$ -integrasjonen i gauge-leddet lett utføres).

### Oppgave 2

Et koordinatsystem  $K$  (koordinater  $x^\mu$ ) utsettes for jevn akselerasjon  $g$  i forhold til et inertialsystem  $K^0$  (koordinater  $x^\mu$ ) slik at  $X=x+\frac{1}{2}gt^2$ ,  $Y=y$ ,  $Z=z$ ,  $T=t$ . Anta  $t < \frac{c}{g}$ .

- a) Finn komponentene for den metriske tensor i  $K$ .
- b) Et atom som befinner seg i ro i origo i  $K$  sender ut lys i positiv  $x$ -retning.

Finn lysfarten  $c = \frac{dx}{dt}$  i  $K$  som funksjon av  $t$ .

Oppgitt: Den romlige avstand mellom to nærliggende punkt  $x^\mu$  og  $x^\mu + dx^\mu$  i et vilkårlig koordinatsystem er gitt ved uttrykket

$$ds^2 = \gamma_{ik} dx^i dx^k = \left( \frac{g_{oi} g_{ok}}{g_{oo}} - g_{ik} \right) dx^i dx^k \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

- c) Det utsendte lys har egenfrekvens  $v_0$ . Finn frekvensen som funksjon av  $t$ , av det lyset som mottas av en observatør som befinner seg i ro på  $x$ -aksen i inertialsystemet  $K^0$ .