UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HöGSKOLE
INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
F.aman. F. Bakke
Tlf. 3649

EKSAMEN I FAG 71550 KLASSISK FELTTEORI
LÖRDAG 12. DESEMBER 1987
KL.0900–1400

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung.
Godkjent lommekalkulator.

Oppgave 1

a)

Vis hvordan en fra et variasjonsprinsipp

$$\int \mathcal{L}(\psi_a, \partial_\mu \psi_a, x^\mu) d^4x = 0 \qquad \mu = 0,1,2,3$$

finner feltlikningene for et felt med n komponenter ψ_a

$a = 1,2,..n$.

b)

Gitt de 3 lagrangetetthetene for et skalart felt $\phi(\vec{r},t)$

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{\rho_0}{2}\left[(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{c_\ell^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2\right]$$

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 + K\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_0 + L_i\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$$

Her er ρ_0, c_ℓ, K, L_1, L_2, L_3 konstanter, x^i $(i=1,2,3)$ er stedskoordinatene x,y,z . Begrunn hvorfor ikke alle disse lagrangetetthetene er akseptable i en ikke-relativistisk teori?

c)

En har en gass i ro med likevekts–tetthet ρ_0 og likevekts–trykk p_0 .

Som feltstörrelse for en svak lydbölge i gassen bruker en potensialet $\phi(\vec{r},t)$ for gasshastigheten $\nabla\phi(\vec{r},t) = \vec{v}(\vec{r},t)$.

Avvikene fra likevektsverdiene for trykk og tetthet p.g.a. lydbölgen er

da gitt ved

$$p - p_0 = -\rho_0 \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad \text{og} \quad \rho - \rho_0 = -\frac{\rho_0}{c_\ell^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

hvor $c_\ell = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$ er lydhastigheten, γ er adiabatkonstanten for gassen. Med passende valg av konstanten K er $\mathcal{L}_1$ lagrangetettheten for lydfeltet.

Finn feltlikningen for hastighetspotensialet ϕ .

d)

Innför koordinater x^μ og x_μ (μ=0,1,2,3) slik at en kan skrive

$\mathcal{L}_0 = \frac{\rho_0}{2}\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi$.

Vis at det, siden $\mathcal{L}_1$ ikke avhenger eksplisitt av sted og tid, finnes en energi–impulstensor

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\partial_\nu\phi - \delta^\mu_\nu\,\mathcal{L}_1$$

som oppfyller lokale bevarelsessetninger $\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0$.

e)

Finn lydfeltets energitetthet $\mathcal{H}$, energiströmtetthet $\vec{S}$ og impulstetthet $\vec{g}$ uttrykt alternativt ved

a) hastighetspotensialet $\phi(\vec{r},t)$

b) gasstettheten $\rho(\vec{r},t)$ og hastigheten $\vec{v}(\vec{r},t)$

og bestem konstanten K slik at impulstettheten $\vec{g}$ får en fysisk rimelig verdi.

<u>Oppgave 2</u>

a)

Anta at komponentene A^μ til en vektor som parallellforskyves fra et sted x^λ til et nærliggende sted $x^\lambda + dx^\lambda$ i et koordinatsystem med metrikk $g_{\mu\nu}$, forandres proporsjonalt med vektorkomponentenes störrelse og med forskyvningen

$$\delta A^\kappa = -\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\,A^\mu\delta x^\lambda \quad .$$

Lengden av en vektor forandres ikke ved parallellforskyvningen

$$\delta(A^\mu A_\mu) = 0 \quad .$$

Benytt dette til å vise fölgende sammenheng mellom den affine konneksjonen $\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}$ og metrikken $g_{\lambda\rho}$

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} g_{\kappa\nu} + \Gamma^{\kappa}_{\nu\lambda} g_{\kappa\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = 0 \ .$$

b)

Redegjör for at denne likningen er gyldig også ved syklisk ombytting av indeksene $\mu \to \nu \to \lambda \to \mu$ og finn herav konneksjonen $\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}$ uttrykt ved metrikken $g_{\lambda\rho}$. (Benytt symmetrien $\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = \Gamma^{\kappa}_{\nu\mu}$) .

c)

Vis hvordan en finner bevegelseslikningene for en massepartikkel som beveger seg i et rom med dette koordinatsystemet, ved å parallellforskyve partikkelens hastighetsvektor

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}$$

i sin egen retning.

d)

Vis at på en 2-dimensjonal kuleflate med radius R og polarkoordinater $x^1=\vartheta$ $x^2=\phi$ er $\Gamma^1_{22} = -\sin\vartheta\cos\vartheta$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}$, resten $\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = 0$ og finn hvordan en vektors komponenter A^{μ} $(\mu=1,2)$ forandrer seg ved parallellforskyvning fra ekvator langs en lengdesirkel $\phi=\phi_0$=konstant.