Eksamen i
Fag 71561 STATISTISK FYSIKK
Onsdag 18.desember 1974
kl. 09.00 - 16.00

(Tillatte hjelpemidler: Ingen)

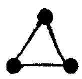
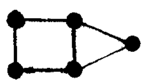
Oppgave 1.

a) Virialutviklingen av tilstandslikningen for et klassisk mangepartikkelsystem med parvekselvirkning $\varphi(r)$ kan formuleres slik:

$$\frac{p}{kT} = \rho + (1-\rho\frac{\partial}{\partial\rho})\text{ (summen av alle ulike umerkede stjerner).}$$

Forklar hva en stjernegraf er og hva en graf representerer i denne implisitte notasjon.

b) Definer symmetritallet for en graf av denne type. Hva er symmetritallet for de to grafene

 og  ?

c) For en gass av harde kuler med diameter d er potensialet

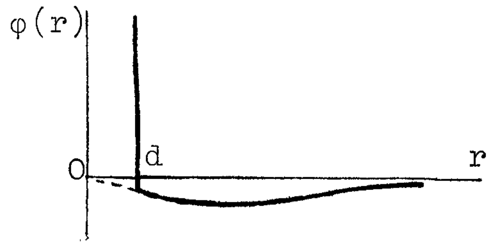
$$\varphi(r) = \begin{cases} \infty & r<d \\ 0 & r>d \end{cases} .$$

I tilstandslikningen

$$p^0/kT = \rho + B_2\rho^2 + B_3\rho^3 + \ldots$$

for en gass av harde kuler skal B_2 beregnes. Hvorfor er alle virialkoeffisientene B_n for en hard-kule gass temperaturuavhengige?

d) Betrakt så parpotensialet



$$\varphi(r) = \begin{cases} \infty & r<d \\ -c\gamma^4 r e^{-\gamma r} & \text{ellers} \end{cases} ,$$

der c er en konstant og γ er en meget liten parameter.

Forklar hvorledes en med utgangspunkt i virialutviklingen får følgende uttrykk for tilstandslikningen til laveste orden, $\mathcal{O}(\gamma^0)$, i den lille parameter γ :

$$p(\rho,T) = p^0(\rho,T) - a\rho^2 \quad , \qquad (1)$$

der p^0 er trykket av en gass av harde kuler med diameter d , og a er en konstant.

e) For fluide systemer karakteriserer den kritiske indeks γ hvorledes den isoterme kompressibilitet langs den kritiske isochor $\rho = \rho_c$ divergerer når en nærmer seg den kritiske temperatur T_c fra overkritiske temperaturer:

$$\kappa_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T \sim \frac{\text{konst}}{|T-T_c|^\gamma} \qquad (\rho = \rho_c \; , T \to T_c^+).$$

Hva er den kritiske indeks γ for den resulterende tilstandslikning (1)?

Oppgave 2.

Et magnetisk materiale bestående av N lokaliserte spinn befinner seg i et ytre magnetfelt $\vec{\mathcal{H}}$. Systemets Hamiltonfunksjon H er

$$H(\sigma_1 \dots \sigma_N) = \sum_{1\leq i<j\leq N} J_{ij}\sigma_i\sigma_j - \mu_0 m\mathcal{H} \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \; .$$

Den skalare spinnvariable σ_i , knyttet til spinn nr. i , antar verdiene $+1,-1$ ettersom spinnet peker parallellt, antiparallellt $\vec{\mathcal{H}}$. J_{ij} er vekselvirkningsenergien mellom spinn i og spinn j , m er størrelsen av det magnetiske moment forbundet med hvert spinn.

a) Vis hvorledes en i prinsipp går fram for å beregne det makroskopiske magnetiske moment M og varmekapasiteten ved konstant magnetfelt $C_{\mathcal{H}}$.

b) Beregn M for det tilfellet at $J_{ij} = 0$ for alle i,j .

c) Anta nå at materialet er éndimensjonalt med spinnene lokaliserte i gitterpunktene $1,2,\ldots N$, og at hvert spinn vekselvirker bare med sine to nærmeste nabospinn slik at

$$J_{ij} = \begin{cases} -J & \text{om } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vis at i dette tilfellet kan partisjonsfunksjonen $Z_{\mathcal{H}}$ uttrykkes som et matriseprodukt

$$Z_{\mathcal{H}} = \sum_{\sigma_1} \ldots \sum_{\sigma_N} V_{\sigma_1\sigma_2} V_{\sigma_2\sigma_3} \ldots\ldots V_{\sigma_{N-1}\sigma_N} V_{\sigma_N\sigma_1} \quad ,$$

når periodiske grensebetingelser (spinn N vekselvirker med spinn 1) er pålagt, og at en mulig form for matriseelementene er

$$V = \begin{pmatrix} e^{\tilde{J}+\tilde{H}} & e^{-\tilde{J}} \\ e^{-\tilde{J}} & e^{\tilde{J}-\tilde{H}} \end{pmatrix} ,$$

der $\tilde{J} = J/kT$, $\tilde{H} = \mu_0 m\mathcal{H}/kT$. (Det er fullstendig akseptabelt å benytte alternative korrekte matriser).

Benytt dette til å beregne den makroskopiske grenseverdi

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \ln Z_{\mathcal{H}} \quad ,$$

og finn herav det midlere magnetiske moment per spinn, $\mathcal{M}$, for et stort system.