Fredag 6. juni 1975

KRITISKE FENOMENER — LØSNINGSSKISSE kl. 0900-1600

Oppgave 1

a) $C_{\mathcal{H}=0}(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{-\alpha}$ $(T \gtrsim T_c)$ ev. mer presist $\alpha = -\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\ln C_{\mathcal{H}=0}}{\ln t}$,

$t \equiv T - T_c$.

$C_{\mathcal{H}=0}(t) \underset{t\to 0}{\sim} (-t)^{-\alpha'}$ $(T<T_c)$

osv.

b) F analytisk i M og T ved det kritiske punkt.

$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 3.$

c) $C_{\mathcal{H}=0} \sim \dfrac{\partial^2 f_{\mathcal{H}=0}}{\partial t^2} \sim |t|^{a-2} g_\pm(0)$ $\boxed{\alpha = \alpha' = 2-a}$

$g_\pm(0)$ = endelig.

$m = \left(\dfrac{\partial f}{\partial \mathcal{H}}\right)_T = (-t)^{a-\Delta} g_-'\left(\dfrac{\mathcal{H}}{(-t)^\Delta}\right) \xrightarrow[\mathcal{H}\to 0]{} (-t)^{a-\Delta} g_-'(0)$

$\boxed{\beta = a - \Delta}$

$g_-'(0)$ = endelig

[men $g_+'(0) = 0$]

$\chi = \left(\dfrac{\partial m}{\partial \mathcal{H}}\right)_T = t^{a-2\Delta} g_\pm''\left(\dfrac{\mathcal{H}}{|t|^\Delta}\right) \xrightarrow[\mathcal{H}\to 0]{} t^{a-2\Delta} g_\pm''(0)$ $\boxed{\gamma = \gamma' = 2\Delta - a}$

$g_\pm''(0)$ = endelig.

Eliminasjon av Δ og a gir $\boxed{\alpha + 2\beta + \gamma = 2}$.

d) Innsetting av $f_s = t^a g_+(\mathcal{H} t^{-\Delta})$ (og tilsv. for g_-) gir

$$(\lambda_t t)^a g_+(\lambda_h \lambda_t^{-\Delta} \mathcal{H}/t^\Delta) = A\, t^a g_+(\mathcal{H}/t^\Delta)$$

): $\boxed{\lambda_t = A^{1/a}, \quad \lambda_h = \lambda_t^\Delta = A^{\Delta/a}}$

og hvor

$$\alpha = 2 - a = 2 - \frac{\ln A}{\ln \lambda_t}$$

Oppgave 2

Eksempler (se f.ex. Hauge & Hemmer: Wilsonteori, kompendium)

Framgangsmåte i stikkordsform:

① **Fikspunkt** $(K_1^*, K_2^*, \dots)$ finnes av $K_m^* = \chi_m(K_1^*, K_2^*, \dots)$.
(Må sjekke at systemet virkelig transformerer seg mot dette.)

② Transformasjonslikningene $K_m' = \chi_m(K_1, \dots)$ **lineariseses** omkring fikspunktet:

$$K_n' - K_n^* = \sum_m T_{nm}(K_m - K_m^*).$$

③ Egenverdiene λ_m av matrisen (T_{nm}) finnes. For normalt spinnsystem med $\mathcal{H}=0$ fås bare én $\lambda > 1$, $\lambda_1 \equiv \lambda_t$. Med $\vec{\mathcal{H}} \neq 0$ én til >1, $\lambda_2 \equiv \lambda_h$.

④ Av λ_t, λ_h finnes indeksene, $\alpha = 2 - \frac{\ln s}{\ln \lambda_t}$ f.eks.
Wilsonteoriens argumentasjon for dette, se f.eks. Hauge og Hemmer.

Oppgave 3

a) Fikspunkt for $v = v' = v^*$, $u = u' = u^*$:

$$v^* = 4v^* + 12(1+v^*)^{-1}u^* - 36(1+v^*)^{-3}u^{*2} + O(u^{*3}) \qquad (6a)$$
$$u^* = 16 \cdot 2^{-d}u^* - 144 \cdot 2^{-d}(1+v^*)^{-2}u^{*2} + O(u^{*3}) \qquad (6b)$$

$u^* = v^* = 0$ er opplagt løsning. $\Rightarrow$ F1
Når $u^* \neq 0$ gir (6b) etter divisjon med u^*:

$$(1 - 16 \cdot 2^{-d}) = -144 \cdot 2^{-d}(1+v^*)^{-2}u^* + O(u^{*2}) \qquad (6c)$$

Høyre side er $\ll 1$, altså eneste mulighet når v.s. er svært liten d.v.s. når $d \approx 4$. Settes $d = 4-\epsilon$ fås venstre side lik $1 - 2^{+\epsilon} = -\epsilon \ln 2 + O(\epsilon^2)$, altså $u^* = O(\epsilon)$. Likn. (6a) gir da at også $v^* = O(\epsilon)$. Utvikling til laveste orden gir:

(6c) $$u^* = \frac{-\epsilon \ln 2}{-144 \cdot 2^{-d}} = \underline{\frac{1}{9}\epsilon \ln 2}$$

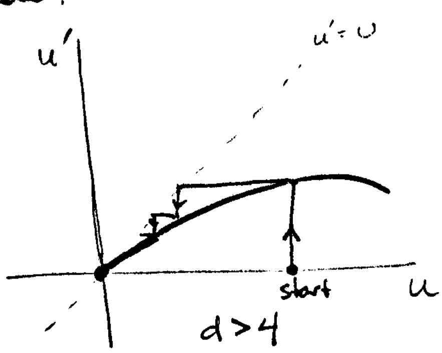
(6a) $$v^* = -4u^* = \underline{-\frac{4}{9}\epsilon \ln 2},$$ til laveste orden.

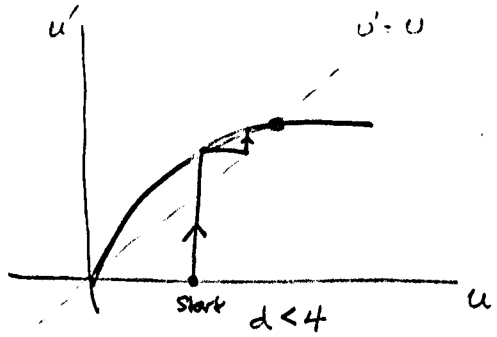
Da det var forutsatt $0 \le u < 1$ ser en at F2 er ubrukbar for $d > 4$ for da er $u^* < 0$.

En ser også av transformasjonslikningen for u,

$$u' = 16 \cdot 2^{-d} \cdot u - 144 \cdot 2^{-d}(1+v)^{-2} u^2 + \dots,$$

følgende:





Fra en viss u-verdi transformeres en seg suksessivt inn mot $u = 0$ (F1!) når $d > 4$, mot en $u^* \neq 0$ (F2!) når $d < 4$. Se figur. Altså F2 for $d < 4$.

b) Linearisering: Med

$$\begin{aligned} v &= v^* + \delta v \\ u &= u^* + \delta u \\ v' &= v^* + \delta v' \\ u' &= u^* + \delta u' \end{aligned}$$

fås i lineær tilnærmelse etter litt regning der $O(\epsilon^2)$ kastes:

$$\delta v' = \left(4 - \tfrac{4\epsilon}{3} \ln 2\right) \delta v + \left(12 - \tfrac{8\epsilon}{3} \ln 2\right) \delta u$$

$$\delta u' = (1 - \epsilon \ln 2)\, \delta u$$

$$\Rightarrow \quad T = \begin{pmatrix} 4 - \frac{4\epsilon}{3} \ln 2 & 12 - \frac{8\epsilon}{3} \ln 2 \\ 0 & 1 - \epsilon \ln 2 \end{pmatrix}$$

Sekulardeterminanten gir uten videre

$$\underline{\lambda_1 = 4 - \tfrac{4\epsilon}{3} \ln 2} \quad (>1)$$

$$\underline{\lambda_2 = 1 - \epsilon \ln 2} \quad (<1)$$

c) $\alpha = 2 - \dfrac{\ln s}{\ln \lambda_t}$. Her er $\lambda_t = \lambda_1 = 4 - \frac{4\epsilon}{3} \ln 2$

$$\ln \lambda_t = 2 \ln 2 + \ln\left(1 - \tfrac{\epsilon}{3} \ln 2\right) = 2 \cdot \ln 2 \left(1 - \tfrac{\epsilon}{6}\right) + O(\epsilon^2)$$

Med $s = 2$ [trykkfeil for 2^d] fås $\underline{\alpha = \frac{3}{2} - \frac{1}{12}\epsilon}$

[Med $s = 2^d$ fås $\alpha = \frac{1}{6}\epsilon$]