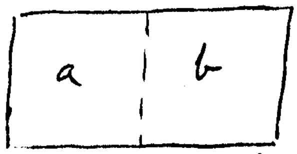
Faseovergangar og kritiske fenomener
Fredag 19.5-1978
kl 0900 - 1500

Løsning oppgave 1.

Med gitte U, V og N_i er entropien S maksimum ved likevekt.

Deler system i 2 deler a og b



U_a, V_a, N_{ia} U_b, V_b, N_{ib}

Foretar forandring fra likevekt:

$$dU = dU_a + dU_b = 0$$
$$dV = dV_a + dV_b = 0$$
$$dN_i = dN_{ia} + dN_{ib} = 0$$

Termodynamiske identitet for hvert delsystem:

$$dS_a = \frac{1}{T_a} dU_a + \frac{p_a}{T_a} dV_a - \sum_i \frac{\mu_{ia}}{T_a} dN_{ia}$$
$$dS_b = \frac{1}{T_b} dU_b + \frac{p_b}{T_b} dV_b - \sum_i \frac{\mu_{ib}}{T_b} dN_{ib}$$

Da S er maksimum må $dS = dS_a + dS_b$ være lik 0. Med likningane ovenfor fås da:

$$0 = dS = \left(\frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_b}\right) dU_a + \left(\frac{p_a}{T_a} - \frac{p_b}{T_b}\right) dV_a - \sum_i \left(\frac{\mu_{ia}}{T_a} - \frac{\mu_{ib}}{T_b}\right) dN_i$$

Da dette gjelder for vilkårlige dU_a, dV_a og dN_i må en ha $T_a = T_b$, $p_a = p_b$ og $\mu_{ia} = \mu_{ib}$.

Altså T, p og μ er konstante over et system i likevekt.

Oppgave 2.

Det kritiske punkt er bestemt ved
$\frac{\partial p}{\partial \rho} = 0$ og $\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}$ (evt. med p erstattet μ og/eller ρ erstattet med $v = 1/\rho$).

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho} = \frac{kT}{1-\rho} - 2a\rho = 0$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} = \frac{kT}{(1-\rho)^2} - 2a = 0$$

Eliminerer a og får

$$\frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{1}{1-\rho}$$

Kritisk tetthet: $\rho_c = \frac{1}{2}$.

Kritisk temperatur: $T_c = \frac{1}{k} 2a\rho(1-\rho) = \frac{a}{2k}$

Kritisk trykk: $p_c = \left(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}\right)a \; (\approx 0{,}097\, a)$

c og s vil være den klassiske kritiske indeksene δ for midlere felt teorier, dvs. $c = s = \delta = 3$. Dette sees også ved rekkeutvikling av p eller μ.

Tetthetene av de koeksisterende faser kan bestemmer ved (et av følgende alternativer)

1. p og μ skal være de samme i begge fasene slik at en får likningene

$$p(\rho_1) = p(\rho_2) \qquad \text{og} \qquad \mu(\rho_1) = \mu(\rho_2)$$

til bestemmelse av tetthetene ρ_1 og ρ_2 i de 2 fasene.

2. En kan benytte Maxwell-konstruksjon (like arealer) i et p-V diagram eller μ-ρ diagram.

3. En kan benytte dobbelt tangent konstruksjon på den fri energi $F = N\mu - pV$ som p.g.a. stabilitet er en konveks funksjon av V ved konstant T, dvs. $F_{VV} \geq 0$.

4. På grunn av symmetrien i det her problemet (da gittergassen er ekvivalent med en tilsvarende Isingmodell) vet en at $\rho_1 = \frac{1}{2} + x$ og $\rho_2 = \frac{1}{2} - x$. Trenger da bare én likning, enten:

$$p\left(\tfrac{1}{2}+x\right) = p\left(\tfrac{1}{2}-x\right) \quad \text{eller}$$

$$\mu\left(\tfrac{1}{2}+x\right) = \mu\left(\tfrac{1}{2}-x\right)$$

Rekkeutvikler for små avvik fra kritisk temperatur og små $x = \rho - \rho_c = \rho - \frac{1}{2}$.

$$p\left(\tfrac{1}{2} \pm x\right) = -kT\left[\ln\tfrac{1}{2} \mp 2x + \tfrac{1}{2}(2x)^2 \mp \tfrac{1}{3}(2x)^3\right] - a\left(\tfrac{1}{4} \pm x + x^2\right)$$

$$0 = p\left(\tfrac{1}{2}+x\right) - p\left(\tfrac{1}{2}-x\right) = 2k(T-T_c)\,2x + 2kT_c\,\tfrac{8}{3}x^3$$

$$x^2 = \frac{3}{4}\,\frac{T_c - T}{T_c}, \quad \underline{\rho = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}\,\frac{T_c - T}{T_c}}}$$

Eventuelt:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \Rightarrow \mu = kT \ln\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right) - 2a\rho + \text{konst.}$$

$$0 = \mu\left(\tfrac{1}{2}+x\right) - \mu\left(\tfrac{1}{2}-x\right) \approx 4kT\left[2x + \tfrac{1}{3}(2x)^3\right] - 4ax \approx$$

$$= 4k(T-T_c)\,2x + 4kT_c\,\tfrac{1}{3}(2x)^3$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{3}{4}\,\frac{T_c - T}{T_c} \quad \text{som ovenfor funnet.}$$

Oppgave 3.

Med $\lambda^{a_r} r = 1$ sees:

$$\Gamma(r,t) = r^{1/a_r}\,\Gamma\left(1, r^{-a_t/a_r} t\right)$$

Γ kan da skrives på formen

$$\Gamma(r,t) = \frac{1}{r^{-1/a_r}} f(x) \qquad \text{med } x = r|t|^{-a_r/a_t}$$

(med forskjellig f for $t > 0$ og $t < 0$)

f er en eller annen funksjon av x.

Eventuelt:

$$\Gamma(r,t) = t^{-1/a_t} h(x)$$

På kritisk punkt: $t \to 0 \Rightarrow x \to 0$ og $f(0)$ må være endelig.

$$\Gamma(r,0) \propto \frac{1}{r^{-1/a_r}} \propto \frac{1}{r^{d-2+\eta}}$$

$$\underline{\eta = 2 - d - 1/a_r}$$

Korrelasjonslengden ξ er gitt ved $\xi = r$ for konstant x, dvs. $\xi|t|^{-a_r/a_t} = \text{konst.}$ eller

$$\xi \propto |t|^{a_r/a_t} \propto \begin{cases} t^{-\nu} & \text{for } t > 0 \\ |t|^{-\nu'} & \text{for } t < 0 \end{cases} \qquad \underline{\nu = \nu' = -a_r/a_t}$$

Fluktuasjonsteoremet:

$$\chi = \beta \sum_{\vec{r}} \Gamma(\vec{r},t) \propto \sum_{\vec{r}} \Gamma(\vec{r},t) \sim \int \Gamma(r,t)\, d^d r$$

$$\sim \int \frac{1}{r^{-1/a_r}} f(x)\, d^d r \sim |t|^{\left(d\frac{a_r}{a_t} + \frac{1}{a_t}\right)} \int x^{1/a_r} f(x)\, d^d x \sim |t|^{\frac{1}{a_t}(d a_r + 1)}$$

$$\sim \begin{cases} t^{-\gamma} & \text{for } t > 0 \\ |t|^{-\gamma'} & \text{for } t < 0 \end{cases} \qquad \underline{\gamma = \gamma' = -\frac{1}{a_t}(d a_r + 1)}$$

Oppgave 4.

Fikspunktet er gitt ved $K_1' = K_1 = K_1^*$ og $K_2' = K_2 = K_2^*$
Andre likning gir da:

$$K_2^* = 2K_2^* - 36K_2^{*2} \quad \text{dvs:} \quad \underline{K_2^* = \frac{1}{36}}$$

Første likning:

$$K_1^* = 4K_1^* + 12K_2^* - 12K_1^*K_2^* - 36K_2^{*2}$$
$$= 4K_1^* - \frac{1}{3}K_1^* + \frac{1}{3} - \frac{1}{36} \quad \text{dvs.} \quad \underline{K_1^* = -\frac{3}{8}\frac{11}{36} = -\frac{11}{96}}$$

Linearisering om fikspunktet gir matrisen:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_1'}{\partial K_1} & \frac{\partial K_1'}{\partial K_2} \\ \frac{\partial K_2'}{\partial K_1} & \frac{\partial K_2'}{\partial K_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 12K_2^* & 12 - 12K_1^* - 72K_2^* \\ 0 & 2 - 72K_2^* \end{pmatrix}$$

Denne matrisen har egenverdiene:

$$\lambda_1 = 4 - 12K_2^* = 10/3$$

og $\lambda_2 = 2 - 36K_2^* = 0$

(bestemt av $\det(M - \lambda I) = 0$ med I lik identitetsmatrisen)

λ_1 som er den relevante egenverdien bestemmer y ved $t' = \lambda_1 t = L^y t$, dvs

$$y = \frac{\ln \lambda_1}{\ln L} = \frac{\ln(10/3)}{\ln 2} = 1.87\ldots$$

En relevant egenverdi er en egenverdi som er større enn 1. I det her tilfellet har en 1 relevant egenverdi som er det en burde forvente fordi problemet har bare temperaturen som relevant fysisk parameter da magnetfeltet er lik 0.