UNIVERSITETET I TRONDHEIM, NTH
INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK

Eksamen i
fag 715 62 FASEOVERGANGER OG KRITISKE FENOMENER
Fredag 1. juni 1979
kl. 0900 - 1500

Tillatte hjelpemidler: K.Rottmann: Mathematische Formelsammlung, regnestav/lommekalkulator.

Oppgave 1

Hva er de alminnelige første ordens betingelser for at to faser er i termodynamisk likevekt?

Utled Clapeyrons likning

$$\frac{dp(T)}{dT} = \frac{S_1-S_2}{V_1-V_2}$$

for likevektskurven $p=p(T)$ som beskriver koeksisterende faser 1 og 2 . Det antas her at faseovergangen er av første orden.

Finn et uttrykk for $dp(T)/dT$ ved en annen-ordens faseovergang der $V_1(T)=V_2(T)$ og $S_1(T)=S_2(T)$ ved likevekt. Forsøk å uttrykke resultatet ved spesifikke varmekapasiteter c_p og varmeutvidelseskoeffisienter α for de to fasene.

Oppgave 2

Hamiltonfunksjonen for et magnetisk materiale bestående av Ising spinn på et kubisk gitter antas være av formen

$$H = -\tfrac{1}{2}J \sum_{(ij)} s_i s_j - \mu_0 m \mathcal{H} \sum_i s_i \qquad (1)$$

der den skalare spinnvariable s_i antar verdiene $s_i=+1/-1$ etter som spinnet peker parallelt/antiparallelt $\vec{\mathcal{H}}$. Summen går over alle nærmeste-nabo spinnpar (i,j) , og m er størrelsen av det magnetiske moment knyttet til spinnet.

Den isoterme susceptibilitet χ_T (regnet per spinn) er bestemt av spinnkorrelasjonsfunksjonen

$$\Gamma(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \langle s_i s_j \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle$$

via fluktuasjonsteoremet

$$\chi_T = \frac{m^2 \mu_0}{kT} \sum_{\vec{r}} \Gamma(\vec{r}) \quad . \tag{2}$$

Vis dette.

Anta nå at koplingskonstanten J er null og vis at det magnetiske moment per spinn, $\mathcal{M}$, er gitt ved

$$\mathcal{M} = m \tanh(m\mu_0 \mathcal{H}/kT) \quad .$$

Hva er spinnkorrelasjonsfunksjonen $\Gamma(\vec{r})$ i dette tilfellet $(J=0)$? Vis via fluktuasjonsteoremet (2) at disse resultatene for $\mathcal{M}$ og $\Gamma(\vec{r})$ er konsistente.

Vi skal nå finne tilstandslikningen for $J>0$ i en molekylærfeltapproksimasjon. Én metode er å erstatte $s_i s_j$ i Hamiltonfunksjonen (1) med

$$s_i \langle s_j \rangle + \langle s_i \rangle s_j - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle$$

som leder til

$$H = -\mu_0 m \mathcal{H}_{eff} \sum_i s_i + \text{et spinnuavhengig ledd},$$

der

$$\mathcal{H}_{eff} = \mathcal{H} + 6J\langle s_j \rangle / \mu_0 m \quad .$$

Vis at tilstandslikningen kan skrives

$$\mathcal{H}(\mathcal{M},T) = \frac{kT}{2m\mu_0} \ln \frac{1+\mathcal{M}/m}{1-\mathcal{M}/m} - \frac{6J}{m\mu_0} \frac{\mathcal{M}}{m}$$

for $\mathcal{H} \neq 0$. Hva er Curietemperaturen T_c ? Beregn de kritiske indekser δ og γ for den kritiske isoterm og for den isoterme susceptibilitet i null felt. Gi en kort kommentar om hvor alminnelig resultatet er.

Nær det kritiske punkt øker rekkevidden av parkorrelasjonsfunksjonen $\Gamma(\vec{r})$. Definer de kritiske indekser η, ν knyttet til korrelasjonsfunksjonen, og argumentér for sammenhengen

$$(2-\eta)\nu = \gamma$$

med den kritiske indeks for susceptibiliteten χ_T .

Oppgave 3

For et spinnsystem kan Gibbs fri energi pr. spinn, g , skrives som en sum av en regulær og en singulær del,

$$g(t,h) = g_r(t,h) + g_s(t,h) \quad ,$$

der $t=(T-T_c)/T_c$ er det dimensjonsløse avviket fra kritisk temperatur, og h er det ytre magnetfeltet på dimensjonsløs form.

Anta at den singulære delen g_s nær det kritiske punkt har følgende homogenitetsegenskap

$$g_s(\lambda^a t, \lambda^b h) = \lambda g_s(t,h)$$

der a og b er konstanter, mens λ er en vilkårlig parameter.

Bruk denne homogenitetsegenskapen til å uttrykke den kritiske eksponenten β (for ordensparameteren ved $t<0$) ved a og b , når magnetiseringen pr. spinn er gitt som $m=(\partial g/\partial h)_t$.

Uttrykk videre eksponentene δ og γ' for den kritiske isotermen og den underkritiske, isoterme susceptibiliteten ved a og b .

Finn på bakgrunn av dette en sammenheng mellom β , δ og γ' .