UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
F.aman.J.S.Høye
Tlf. 3654

Eksamen i

dr.ing.fag.71562 Faseoverganger og kritiske fenomener

Onsdag 12.januar 1983
kl.0900-1500

Tillatte hjelpemidler: Regnestav, lommekalkulator og matematisk formelsamling (Rottmann).

Oppgave 1

For et magnetisk system vil stabilitetsbetingelsen for avvik fra likevekt være

$$\delta U - \mathcal{H}_0 \delta M - T_0 \delta S \geqslant 0$$

Definer størrelsene som inngår.
I ulikheten ovenfor erstattes nå U med Helmholtz fri energi $F=U-TS$.
Hva blir da denne ulikheten ?
Størrelsene δF og δS kan så rekkeutvikles i δM og δT. Sett dette inn i ulikheten. Den resulterende ulikheten fører til visse stabilitetskrav på de andre-deriverte av F med hensyn på T og M. Hva blir disse stabilitetskravene ?

Partiellderiverte i termodynamikken kan skrives som Jacobideterminant slik at $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial(z,y)}{\partial(x,y)}$.

Benytt dette til å vise at $C_M\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial M}\right)_S = C_{\mathcal{H}}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial M}\right)_T$

der C_M og $C_{\mathcal{H}}$ er spesifikke varmer ved henholdsvis konstant M og konstant $\mathcal{H}$.

Oppgave 2

Helmholtz fri energi i et visst område for en magnet kan skrives som

$F = a_0 + a_2(T-T_0)M^2 + a_4M^4 + a_6M^6$

der a_0, a_2, a_4, a_6 og T_0 er konstanter slik at $a_2 > 0$, $a_6 > 0$ og $T_0 > 0$. Ved å derivere F med hensyn på M finnes magnetfeltet $\mathcal{H}$. Hvordan kan en bestemme systemets kritiske punkt?

Med den gitte F har systemet kritisk punkt $T=T_c$ og $M=M_c$. Bestem T_c og M_c når $a_4 > 0$ og når $a_4 < 0$.

For små avvik fra kritisk punkt kan $\mathcal{H}$ rekkeutvikles i det lille avviket $\Delta M = M - M_c$. Dvs. en finner

$\mathcal{H} = C_0 + C_1\Delta M + C_2(\Delta M)^2 + C_3(\Delta M)^3 + \ldots$.

Bestem koeffisientene C_1, C_2 og C_3. [Hint: C_n kan uttrykkes som $C_n = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n \mathcal{H}}{\partial M^n}$ for $M=M_c$].

For $T<T_c$ har systemet faseovergang som kan bestemmes ved at regelen om like arealer eller Maxwell-konstruksjon benyttes i et $M\mathcal{H}$-diagram. Bestem så ΔM for de to fasene i likevekt for T nær T_c.

Hva er den tilhørende kritiske indeks β ?

Hva er så den kritiske indeks δ for den kritiske isotermen $\mathcal{H}=\mathcal{H}(M)$ for $T=T_c$?

Oppgave 3

For et spinn system nær det kritiske punkt i null magnetfelt kan spinn-korrelasjonsfunksjonen Γ for store avstander r skrives som en generalisert homogen funksjon:

$$\Gamma(\lambda^{a_r} r, \lambda^{a_t} t) = \lambda \Gamma(r,t)$$

der t er avvik fra kritisk temperatur mens a_r og a_t er konstanter. Hva kan en herav slutte om den generelle formen på funksjonen $\Gamma(r,t)$?

Bestem de kritiske indekser (η, ν, og ν') som karakteriserer Γ uttrykt ved a_r, a_t og systemets dimensjonalitet d.

Ved hjelp av fluktuasjonsteoremet kan susceptibiliteten χ uttrykkes direkte ved Γ. Hva blir de kritiske indeksene (γ og γ') for χ ?

Oppgave 4

For et spinn system i null magnetfelt finnes følgende transformasjonslikninger for koplingskonstantene K_1 og K_2 ved en Wilson transformasjon (spinn-celle transformasjon)

$$K_1' = 4K_1+12K_2-12K_1K_2-36K_2^2$$
$$K_2' = 2K_2-36K_2^2$$

Bestem transformasjonens ikke-trivielle fikspunkt (dvs. $K_1 \neq 0$, $K_2 \neq 0$). Ifølge Kadanoffs argumenter vil cellesystemet ha en effektiv temperatur (avvik fra kritisk temperatur) $t'=L^y t$. Hva blir y når $L=2$?

Hva er en relevant egenverdi? Er antall relevante egenverdier i dette tilfellet som en burde forvente?