UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Professor E.H.Hauge
Tlf. 3651

Eksamen i fag 71562 Faseoverganger og kritiske fenomener

Lørdag 19.januar 1985
kl.0900-1500

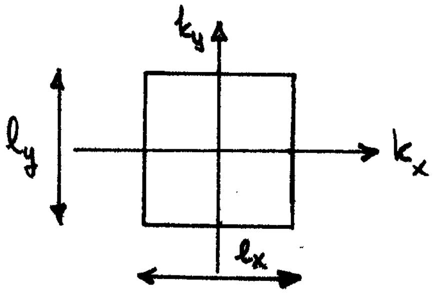
Tillatte hjelpemidler: Lommeregner
Rottmann: Mathematische Formelsammlung

NB: For at ikke forskjellige konvensjoner for Fouriertransformasjoner skal skape unødig forvirring, er en anbefalt konvensjon gitt som vedlegg i oppgavesettet. (Andre konvensjoner kan selvsagt også brukes.)

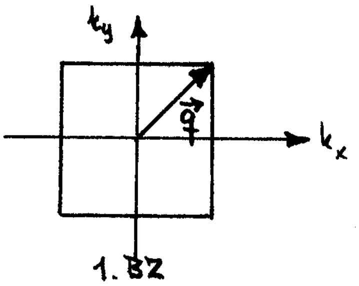
Oppgave I

I denne oppgaven tar vi for oss Landauteorien for kontinuerlige faseoverganger, anvendt på orden-uorden overganger i et monolag edelgassatomer adsorbert på et substrat med struktur som et kvadratisk gitter med gitterkonstant a .

a. Konstruer det resiproke gitteret for dette tilfellet, vis at 1.Brillouin sone har form som vist på figuren, og bestem ℓ_x og ℓ_y .



b. En ordnet fase er karakterisert ved Fourierkomponenten $\rho_{\vec{q}}$ der $\vec{q}$ er vektoren vist i figuren. Bestem tetthetsvariasjonene i $\vec{r}$-rommet, $\rho(\vec{r}_j)=\rho(m_j a\hat{x},n_j a\hat{y})$, der (m_j,n_j) er heltall og $(\hat{x},\hat{y})$ enhetsvektorer, for en ordnet tilstand beskrevet av $\rho_{\vec{q}}$ alene.

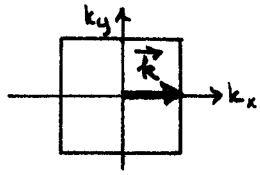


c. Bruk systemets (diskrete) rotasjonsinvarians til å finne samtlige uavhengige komponenter av ordensparameteren, hvis ene komponent er $\rho_{\vec{q}}$. (Med andre ord: Finn "stjernen" $\vec{q}$ tilhører.)

d. Anta at de adsorberte atomene har en kontinuerlig faseovergang fra en uordnet til en ordnet struktur beskrevet av $\vec{q}$ (og dens "stjerne") når temperaturen senkes gjennom T_c . Bruk systemets symmetrier til å konstruere Landaus fri energi for faseovergangen, til $\mathcal{O}(\rho_{\vec{q}}^4)$. Hvilken universalitetsklasse er karakterisert ved en slik fri energi?

e. Gjenta programmet under punktene b,c og d for vektoren $\vec{k}$ vist i figuren.

1.BZ:



Oppgave II

I denne og neste oppgave tar vi utgangspunkt i en generell Isingmodell der spinn $\sigma_i = \pm 1$ er plassert på et regulært gitter. Spinnene har parvekselvirkning J_{ij} og påvirkes av et (hensiktsmessig skalert) stedsavhengig ytre felt h_i . Hamiltonfunksjonen er da

$$H = -\sum_{i<j} J_{ij}\sigma_i\sigma_j - \sum_i h_i\sigma_i$$

der $\sum_{i<j}$ går over alle par av spinn. Spinn-spinn korrelasjonsfunksjonen er definert ved

$$\Gamma_{ij} = \langle\sigma_i\sigma_j\rangle - \langle\sigma_i\rangle\langle\sigma_j\rangle \ .$$

a. Vis at i et slikt stedsavhengig ytre felt er spinn-spinn korrelasjonsfunksjonen gitt som

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{\beta}\,\frac{\partial m_i}{\partial h_j}$$

der $m_i = \langle\sigma_i\rangle$ og $\beta = 1/k_B T$. Hva holdes konstant under derivasjonen?

b. Vis deretter fluktuasjonsteoremet i et homogent ytre felt h

$$\chi_T \equiv \left(\frac{\partial m}{\partial h}\right)_T = \beta \sum_j \Gamma_{ij} \ .$$

c. Nær kritiske punkt divergerer susceptibiliteten $\chi_T \sim |T-T_c|^{-\gamma}$ og korrelasjonslengden $\xi \sim |T-T_c|^{-\nu}$, og korrelasjonsfunksjonen får formen

$$\Gamma_{ij} \sim \Gamma(r_{ij}) \sim A\,\frac{e^{-r_{ij}/\xi}}{r_{ij}^{d-2+\eta}}$$

Bruk fluktuasjonsteoremet til å finne en eksakt forbindelse mellom eksponentene γ, ν og η .

Oppgave III

Vi bruker nå midlere felttilnærmelse på den generelle Ising modellen definert i oppgave II. I denne tilnærmelsen finnes m_i som løsninger av de koplete likningene

$$m_i = \tanh[\beta(\sum_{j(\neq i)} J_{ij} m_j + h_i)] \; .$$

Av dette følger at Fouriertransformasjonen (med konvensjonene anbefalt i vedlegget) av spinn-spinn korrelasjonsfunksjonen, for en romlig homogen tilstand $(h_i=h,\ m_i=m)$, er gitt som

$$\Gamma_{\vec{k}} = \frac{v_0(1-m^2)}{1-v_0^{-1}(1-m^2)\beta J_{\vec{k}}}$$

Det ovenstående skal ikke utledes.

a. Bruk dette til å finne struktur og T_c for den ferromagnetiske Isingmodellen med nærmeste nabovekselvirkning, $J>0$, på et kvadratisk gitter i 2 dimensjoner.

b. Bruk det dernest til å finne struktur og T_c for den anti-ferromagnetiske Isingmodellen med nærmeste nabovekselvirkning, $J<0$, på et kvadratisk gitter i 2 dimensjoner.

c. Skisser og kommenter sammenhenger, uten detaljerte utledninger, mellom metode og resultater i denne oppgaven og i oppgave I.

Anbefalt Fourierkonvensjon:

$$\rho_{\vec{k}} = v_0 \sum_j e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_j} \delta\rho_j$$

$$\delta\rho_j = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}}' e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_j} \rho_{\vec{k}}$$

Løsn. pl: 71545 19.1.85.

(identisk)

Her går $\sum_j$ over alle gitterpunkt innen totalvolumet V, v_0 er volumet til enhetscella i $\vec{r}$-rommet, og $\sum_{\vec{k}}'$ går over alle (tillatte) verdier av $\vec{k}$ i 1.Brillouinsone.
(I eksemplet er $\delta\rho_j = \rho_j - \rho$ avviket fra midlere tetthet, ρ.)

Tilsvarende for korrelasjonsfunksjoner, når overflateeffekter neglisjeres:

$$\Gamma_{\vec{k}} = v_0 \sum_\ell e^{-i\vec{k}(\vec{r}_\ell - \vec{r}_m)} \Gamma_{m\ell}$$

$$\Gamma_{m\ell} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}}' e^{i\vec{k}(\vec{r}_\ell - \vec{r}_m)} \Gamma_{\vec{k}} .$$

Når $V \to \infty$ for gittersystemet, blir alle $\vec{k}$-verdier i 1.Brillouinsone tillatte, og med d=dimensjonaliteten gir grenseprosessen $V \to \infty$:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}}' \to \int' \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \qquad (':1.BZ.)$$

Dersom en deretter (med $V=\infty$) går over fra gittersystemet til et rent kontinuumssystem, gjøres dette ved grenseprosessen $v_0 \to 0$, som fører til at 1.Brillouinsone omfatter hele $\vec{k}$-rommet, slik at

$$v_0 \sum_j \to \int d^d r \quad ; \quad \int' \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \to \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} .$$