UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontaktperson:
Professor E.H.Hauge
tlf. 3651

EKSAMEN I FAG 71562 FASEOVERGANGER OG KRITISKE FENOMENER

Fredag 5.juni 1987
kl.0900-1400

Tillatte hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator
K. Rottmann: Mathematische Formelsammlung.

Oppgave 1

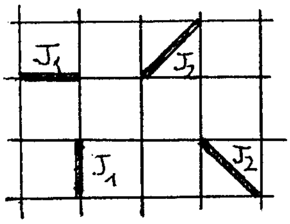
Middelfelt teoriens uttrykk for Fourieromvendingen til spinnkorrelasjonsfunksjonen Γ_{ij} er

$$\Gamma_{\vec{k}} = \frac{(1-m^2)v_0}{1-\frac{\beta}{v_0}(1-m^2)J_{\vec{k}}} \qquad (1)$$

der $J_{\vec{k}}$ er Fourieromvendingen til parvekselvirkningen J_{ij} , $m=\langle\sigma_i\rangle$, $\beta=1/k_BT$, og v_0 er volumet til enhetscella i gitteret.

a Bruk (1) til å formulere betingelsen for en kontinuerlig faseovergang til en struktur karakterisert ved bølgevektoren $\vec{q}$. Hvordan bestemmes overgangstemperaturen T_c ?

b I en 2-dimensjonal Isingmodell på et kvadratisk gitter er nærmeste og nest nærmeste nabokoplinger J_1 og J_2 , som vist på figuren.

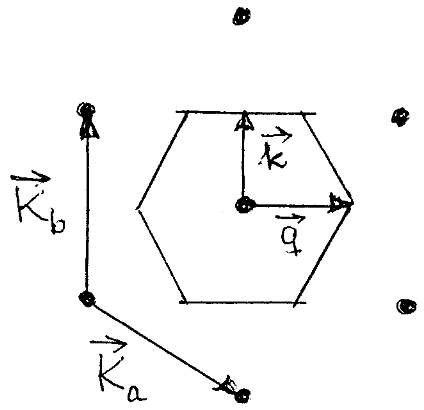


Hvilke betingelser på J_1 og J_2 gir (1) for at den ordnete fasen skal være (i) ferromagnetisk (ii) antiferromagnetisk (iii) lagdelt antiferromagnetisk ?

Oppgitt [Oppgave 1 og 2]:

$$f_{\vec{k}} = v_0 \sum_i e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} f(\vec{r}_i) \quad ; \quad f(\vec{r}_i) = \int_{1.BZ} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} f_{\vec{k}}$$

Oppgave 2



Første Brillouinsone for et triangulært gitter i 2 dimensjoner (gitterkonstant a) har form som vist på figuren. Punktene er resiproke gitterpunkt. Basisvektorene i det resiproke gitteret er

$\vec{K}_a$ og $\vec{K}_b$, med $|\vec{K}_a| = |\vec{K}_b| = 4\pi/a\sqrt{3}$.

a En ordnet fase adsorbert på et triangulært gitter er karakterisert ved Fourierkomponenten $\rho_{\vec{q}}$, der $\vec{q}$ er vist i figuren. Bruk systemets (diskrete) rotasjonsinvarians til å bestemme samtlige uavhengige komponenter av ordensparameteren, hvis ene komponent er $\rho_{\vec{q}}$. Med andre ord: Bestem "stjernen" $\{\vec{q}_i\}$ som $\vec{q}$ tilhører.

b Bestem stjernen $\{\vec{k}_i\}$ som $\vec{k}$ (vist i figuren) tilhører.

c Skriv, for tilfellet under pkt. b

$$\rho_{\vec{k}} = (2\pi)^2 \sum_i \psi_i \delta(\vec{k}-\vec{k}_i)$$

og bruk systemets diskrete rotasjons- og translasjonsinvarianser til å konstruere Landaus fri energi $\Delta F(T,\vec{\psi})$ som funksjon av ordensparameteren $\vec{\psi} = \{\psi_i\}$.

*

Når $\vec{R}_{mn} = m\vec{a} + n\vec{b}$ er gitterpunktene i det triangulære gitter, gir stjernen under pkt. a ordnete faser som svarer til tetthetsvariasjonen

$$\delta\rho(\vec{R}_{mn}) = 2\psi\cos\left[\frac{2\pi(2m+n)}{3} - \theta\right] ; \quad \theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

med ordensparameter $\vec{\psi} = (\psi, \theta)$. Dette skal ikke utledes.

*

d Bestem $\delta\rho(\vec{R}_{mn})$ for de ordnete faser som beskrives av stjernen under punkt b. Bestem $\vec{\psi}$ slik at ett av undergitrene har høyere tetthet enn de øvrige, som alle har samme tetthet.

e Edelgassatomer med diameter d adsorberes på et substrat med adsorbsjonspunkter som danner et triangulært gitter. Gitterkonstanten er a . For en bestemt kombinasjon av substrat og adatomer er d=1.9 a. Vurder mulige kontinuerlige overganger og deres universalitetsklasser.

Oppgave 3

I forelesningene ble Landau-Ginzburg teorien brukt til "klassisk" diskusjon av fluktuasjonene nær det kritiske punkt. Her skal vi bruke den til å utlede grenseflateprofilet mellom to koeksisterende faser.

Landau-Ginzburg funksjonalen for den fri energi knyttet til en $\vec{r}$-avhengig magnetisering (generelt: ordensparameter) $m(\vec{r})$ har formen

$$\Delta F[m(\vec{r})] = \int d\vec{r} \left\{ \frac{g}{2}(\nabla m)^2 + f(m(\vec{r})) \right\} \qquad (1)$$

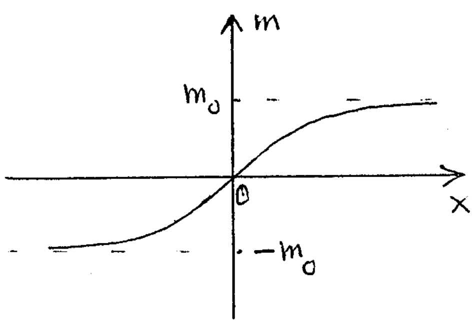
der $f(m)$ er Landaus fri energi pr. volumenhet, som nær det kritiske punkt kan skrives

$$f(m) = \frac{r}{2} m^2 + \frac{u}{4!} m^4 \qquad (2)$$

med $r = a\tau = a(T-T_c)/T_c$, og (g,a,u) positive konstanter.

a Anta først at m er konstant i $\vec{r}$-rommet (fluktuasjonene neglisjeres) og bestem likevektsverdien m_0 for $\tau>0$ og for $\tau<0$. Bestem (den klassiske) eksponenten β .

b Anta så at $\tau<0$, og at vi har koeksistens mellom to faser med $m=\pm m_0$. Anta videre at $x=0$ (se figuren) definerer en plan grenseflate (i 3 dimensjoner) mellom spinn-opp fasen til høyre og spinn-ned fasen til venstre. Vis at minimalisering av $\Delta F[m(x)]$ for dette tilfellet (fluktuasjonene igjen neglisjert) gir følgende likning for profilet $m(x)$



$$g \frac{d^2 m}{dx^2} = \frac{df(m)}{dm} \qquad (3)$$

med grensebetingelser $m(x \to \pm\infty) = \pm m_0$.

c Bruk (3) og (2) til å bestemme den karakteristiske lengdeskalaen som $\delta m(x)=m_0-m(x)$ faller av på når $x \to \infty$. Argumenter for at denne skalaen er korrelasjonslengden, ξ , og bestem (den klassiske) eksponenten ν .

d Innfør $y(x)=m(x)/m_0$. Bruk (3) med grensebetingelser, og formen (2) for $f(m)$, til å vise at $y(x)$ oppfyller likningen

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{-r}{2g}(1-y^2)^2$$

Integrer likningen og bestem profilet $m(x)$.

e Grenseflatens ekstrabidrag (utover volumbidraget) pr. flateenhet til den fri energi er ingenting annet enn overflatespenningen, σ . Bruk (1) og resultatene under pkt. a og c til å estimere (ikke detaljregne!) σ nær det kritiske punkt. Bestem den klassiske eksponenten μ , definert ved $\sigma \sim |\tau|^{\mu}$.