EKSAMEN VÅR 87
FASEOVERGANGER OG KRITISKE FENOMENER

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a

Når temperaturen senkes divergerer $\Gamma_{\vec{k}}$ først ved $\vec{k}=\vec{q}$ der

$$\max_{\vec{k}} J_{\vec{k}} = J_{\vec{q}}$$

Siden $m_{\vec{k}} = \frac{1}{\beta}\Gamma_{\vec{k}} h_{\vec{k}}$ betyr denne divergensen i den $\vec{k}$-avhengige susceptibiliteten $\Gamma_{\vec{k}}$ en kontinuerlig faseovergang til en ordnet fase med ordensparameter $m_{\vec{k}}$. [Dersom en 1. ordens faseovergang ikke har kommet den kontinuerlige i forkjøpet]
Overgangstemperatura bestemt av

$$k_B T_c = \frac{1}{v_0}(1-m^2) J_{\vec{q}}$$

Siden $m \neq 0$ (i alminnelighet) og $m = m(T,h)$ er dette en ikkelinear likning for T_c. (Med $m=0$ som for ferromagnet $k_B T_c = \frac{1}{v_0} J_0$).

b

$$J_{\vec{k}} = v_0 \sum_i e^{-i\vec{k}\vec{r}_i} J(\vec{r}_i) = v_0 \{ 2J_1 \cos k_1 a + 2J_1 \cos k_2 a$$
$$+ 2J_2 \cos(k_1+k_2)a + 2J_2 \cos(k_1-k_2)a \}$$

der a er gitter-konstanten. Altså

$$J_{\vec{k}}/v_0 = 2J_1(\cos k_1 a + \cos k_2 a) + 4J_2 \cos k_1 a \cos k_2 a$$

Ferromagnetisk orden $\vec{k}=0$

(i) $J_{\vec{0}}/v_0 = 4(J_1+J_2)$

Antiferromagnetisk orden $\vec{k}=(\frac{\pi}{a},\frac{\pi}{a})$

(ii) $J_{\frac{\pi}{a},\frac{\pi}{a}}/v_0 = -4J_1+4J_2$

Lagdelt antiferrom. orden $\vec{k}=(0,\frac{\pi}{a})$ eller $(\frac{\pi}{a},0)$

(iii) $J_{0,\frac{\pi}{a}}/v_0 = J_{\frac{\pi}{a},0}/v_0 = -4J_2$

Ferromagnet når

$$J_1+J_2 > -J_1+J_2 \quad \Rightarrow \quad J_1>0$$

og $$J_1+J_2 > -J_2 \quad \Rightarrow \quad J_2 > -\tfrac{1}{2}J_1$$

Antiferromagnet når

$$-J_1+J_2 > J_1+J_2 \quad \Rightarrow \quad J_1<0$$

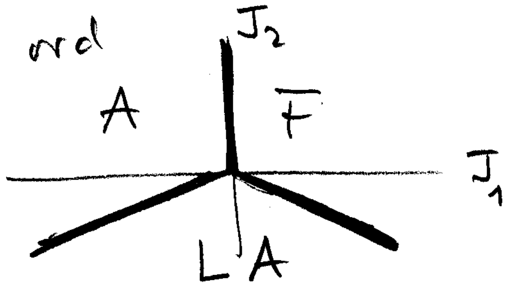
$$-J_1+J_2 > -J_2 \quad \Rightarrow \quad J_2 > \tfrac{1}{2}J_1$$

Lagdelt antiferromagnet når

$$-J_2 > J_1+J_2 \quad \Rightarrow \quad J_2 < -\tfrac{1}{2}J_1$$

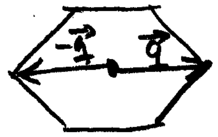
$$-J_2 > -J_1+J_2 \quad\quad J_2 < \tfrac{1}{2}J_1$$

Med andre ord

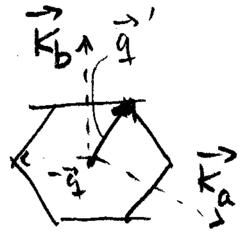


Oppgave 2

a



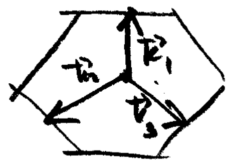
Stjernen består av $\vec{q}$ og $-\vec{q}$ siden vektorene til alle andre hjørner kan dannes av $(\vec{q}, -\vec{q})$ pluss en vektor i det resiproke gitter



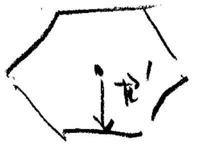
F.eks $\vec{q}\,' = -\vec{q} + \vec{K}_a + \vec{K}_b$

Tilsvarende for andre symmetriop. på $\vec{q}$.

b



Stjernen består av $\{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3\}$



F.eks: $\vec{k}\,' = \vec{k}_1 - \vec{K}_b$.

c

$$\rho_{\vec{k}} = (2\pi)^2 \sum_i \psi_i\, \delta(\vec{k} - \vec{k}_i)$$

Diskret rotasjons symmetri $\Rightarrow$ permutasjons symmetri $(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) \Rightarrow$ perm. sym. (ψ_1, ψ_2, ψ_3).

Translasjonssymmetri (Trans. op. $T_{\vec{R}}$, $\vec{R}$ = res. gitt.vekt.)

$$T_{\vec{R}}\, \rho_{\vec{k}_i} = \rho_{\vec{k}_i}\, e^{-i\vec{k}_i \vec{R}}$$ Forbudt ($\Leftrightarrow$ ikke tillatt for alle $\vec{R}$mn)

$$T_{\vec{R}}\, \rho^2_{\vec{k}_i} = \rho^2_{\vec{k}_i}\, e^{-2i\vec{k}_i \vec{R}}$$ OK

$$T_{\vec{R}}\, \rho_{\vec{k}_1}\rho_{\vec{k}_2}\rho_{\vec{k}_3} = \rho_{\vec{k}_1}\rho_{\vec{k}_2}\rho_{\vec{k}_3}\, e^{-i(\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3)\vec{R}}$$ OK

siden $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 = 0$.

Alle andre produkter av 3 ρ forbudt.

$$T_{\vec{R}}\, \rho^4_{\vec{k}_i} = e^{-4i\vec{k}_i \vec{R}}$$ OK.

$$\Delta F(\vec{\psi}, T) = \frac{r}{2}\psi^2 - \frac{c}{3!}\psi_1\psi_2\psi_3 + \frac{u}{4!}\psi^4 + \frac{v}{4!}\sum_{i=1}^{3}\psi_i^4$$

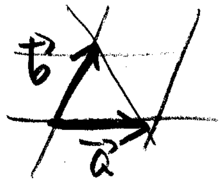
der $\psi = |\vec{\psi}|$

Fire tilstands Potts U-klasse

<u>d</u>

$$\delta\rho(\vec{R}_{mn}) = \int_{BZ}\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2} e^{-i\vec{k}\vec{R}_{mn}} (2\pi)^2 \sum_i \psi_i\,\delta(\vec{k}-\vec{k}_i)$$

$$= \sum_i \psi_i\, e^{-i\vec{k}_i\cdot\vec{R}_{mn}}$$



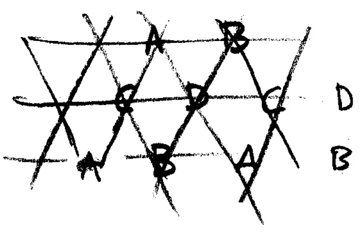
$$\vec{R}_{mn} = m\vec{a} + n\vec{b}$$

$$\vec{k}_1 = +\tfrac{1}{2}\vec{K}_b \;;\quad \vec{k}_2 = -\tfrac{1}{2}(\vec{K}_a + \vec{K}_b);\; \vec{k}_3 = \tfrac{1}{2}\vec{K}_a$$

$$\delta\rho(\vec{R}_{mn}) = \psi_1 e^{-i\frac{1}{2}\vec{K}_b(m\vec{a}+n\vec{b})} + \psi_2 e^{+\frac{i}{2}(\vec{K}_a+\vec{K}_b)(m\vec{a}+n\vec{b})} + \psi_3 e^{-\frac{i}{2}\vec{K}_a(m\vec{a}+n\vec{b})}$$

Siden $\vec{K}_a\vec{a} = \vec{K}_b\vec{b} = 2\pi$ og $\vec{K}_a\vec{b} = \vec{K}_b\vec{a} = 0$
gir dette

$$\delta\rho(\vec{R}_{mn}) = \psi_1(-1)^n + \psi_2(-1)^{m+n} + \psi_3(-1)^m$$



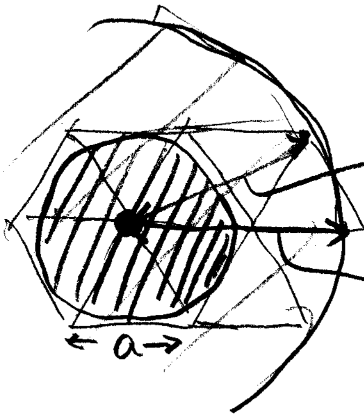
$$\delta\rho_A = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$$
$$\delta\rho_B = \psi_1 - \psi_2 - \psi_3$$
$$\delta\rho_C = -\psi_1 - \psi_2 + \psi_3$$
$$\delta\rho_D = -\psi_1 + \psi_2 - \psi_3$$
$$\overline{\Sigma\,\delta\rho = 0}$$

$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_0$ gir

$$\delta\rho_A = 3\psi_0$$
$$\delta\rho_B = -\psi_0$$
$$\delta\rho_C = -\psi_0$$
$$\delta\rho_D = -\psi_0$$

[For eksempel.]

e



$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \sqrt{3}\, a = 1.73\, a$

$d = 1.9\, a$

Siden $d > a$ er "ferromagnetisk" orden umulig (Ising)

Siden $d > \sqrt{3} a$ er $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ orden umulig (3-tilst. Potts)

Siden $d < 2a$ er 2×2 ord mulig (4 tilstands Potts)

Altså: Bare 4-tilstands Potts U-klasse med ordnet fase som funnet under pkt d. er mulig kontinuerlig overgang her

[Den oppgitte $\delta\rho(\vec{R}_{mn})$ for stjernen $\{\vec{q}_1, -\vec{q}\}$ (3-tilstands Potts) gir forhøyet tetthet på ett av 3 undergitre]

Oppgave 3

a $m(\vec{r})$ = konst.

Likevekt: $0 = \frac{\partial F}{\partial m} = rm + \frac{u}{6} m^3 = 0$

$\Rightarrow m = 0$ (ustabil

$m_0^2 = -\frac{6r}{u} \qquad m_0 = \pm\sqrt{\frac{-6a\tau}{u}}$

$m_0 \sim (-\tau)^\beta$ def. $\beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$

b

$$\delta \Delta F[m(x)] = \overset{\swarrow \text{areal for grenseflaten}}{A} \int dx \left\{ g \frac{dm}{dx} \delta \frac{dm}{dx} + \frac{df}{dm} \delta m \right\}$$

$$\underset{\nearrow}{=} A \int dx \left\{ -g \frac{d^2 m}{dx^2} + \frac{df}{dm} \right\} \delta m = 0$$

delvis integrasjon

$\frac{dm}{dx} = 0$ når $x \to \pm\infty$, der $m = \pm m_0$

δm vilkårlig variasjon rundt $m(x)$ som gir minimal ΔF $\Rightarrow$

$$g \frac{d^2 m}{dx^2} = \frac{df}{dm} \quad ; \quad m(x \to \pm\infty) = \pm m_0 \qquad \text{qed.}$$

c

$$g \frac{d^2 m}{dx^2} = rm + \frac{u}{6} m^3$$

Med $m(x) = m_0 - \delta m(x)$ utvikles i små δm når x stor

$$-g \frac{d^2}{dx^2} \delta m(x) = \underbrace{r m_0 + \frac{u}{6} m_0^3}_{=0} - r \delta m(x) - \underbrace{\frac{u}{2} m_0^2}_{-3r} \delta m(x) + \cdots$$

$$= 2r\, \delta m(x) + \cdots$$

Altså

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\delta m(x)\right) = \frac{-2r}{g}\,\delta m(x) \cancel{+\cdots}$$

$$\delta m(x) \simeq e^{\pm\sqrt{\frac{-2r}{g}}\,x} \qquad + \text{uakseptabel}.$$

$$= e^{-x/\xi}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{g}{-2r}} = \sqrt{\frac{g}{2a(-\tau)}} \sim (-\tau)^{-\nu}\ ;\ \nu = \frac{1}{2}$$

Den karakteristiske lengden her må være korrelasjonslengden fordi den uttrykker samme fysikk: Hvor langt propageres signalet om et lite avvik fra likevekt.

[NB: Merk at $\xi(\tau \lesssim 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\xi(\tau \gtrsim 0)$!]

d

$$g\frac{d^2m}{dx^2} = rm + \frac{u}{6}m^3 \quad\Rightarrow\quad g\,m'm'' = \left(rm + \frac{u}{6}m^3\right)m'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}g(m')^2 = \frac{1}{2}rm^2 + \frac{u}{4!}m^4 + \underset{\text{konstant}}{c}$$

c bestemt av $m = \pm m_0 \Rightarrow m' = 0$ (grensebet.

$$0 = \frac{1}{2}rm_0^2 + \frac{u}{4!}m_0^4 + c = -\frac{3r^2}{u} + \frac{3r^2}{2u} + c$$

$$c = \frac{3}{2}\frac{r^2}{u} = \frac{u}{24}m_0^4$$

$$\frac{1}{2}g(m')^2 = \frac{1}{2}rm^2 + \frac{u}{4!}m^4 + \frac{u}{4!}m_0^4$$

$$= \underbrace{\frac{u}{24}m_0^4}_{-\frac{r}{4}\cdot m_0^2}\left[1 + \frac{12r}{u}\cdot\left(\frac{u}{-6r}\right)\left(\frac{m}{m_0}\right)^2 + \left(\frac{m}{m_0}\right)^4\right]$$

Med $y = \frac{m}{m_0}$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -\frac{r}{2g}\left(1-y^2\right)^2 \qquad \text{qed.}$$

$$\frac{dy}{dx} = +\sqrt{\frac{-r}{2g}}\left(1-y^2\right) = \frac{1}{2\xi}\left(1-y^2\right)$$

↑ grensebet.

$$\frac{dy}{1-y^2} = \frac{dx}{2\xi} \Rightarrow \frac{dy}{1+y} + \frac{dy}{1-y} = \frac{dx}{\xi}$$

$$\ln(1+y) - \ln(1-y) = \frac{x}{\xi} + \text{const.}$$

Grensebet: $x=0 \quad m=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \text{const.}=0$

$$\frac{1+y}{1-y} = e^{x/\xi} \qquad 1+y = e^{x/\xi} - y e^{x/\xi}$$

$$y = \frac{e^{x/\xi}-1}{e^{x/\xi}+1} = \tanh\frac{x}{2\xi}$$

$$\boxed{m(x) = m_0 \tanh\frac{x}{2\xi}}$$

e Bidrag til overflatens fri energi fra $(\nabla m)^2$ og $f(m)$ leddet av samme størrelsesorden [Presis samme faktisk]

$$\sigma \sim \text{konst}\int dx \left(\frac{dm}{dx}\right)^2 \sim \xi\left(\frac{m_0}{\xi}\right)^2 \sim \frac{m_0^2}{\xi}$$

$$\uparrow \sim \frac{m_0}{\xi}$$

klassisk

$$\sigma \sim (-\tau)\cdot(-\tau)^{\frac{1}{2}} \sim (-\tau)^{3/2} \qquad \boxed{\mu = \frac{3}{2}}$$

$\mu(\text{Ising}) \approx 1.26$