Eksamen i fag 715 65 (Innføring i kvantemekanikk)

Tirsdag 24.1.1978 kl.0900-1500.

Tillatte hjelpemidler: Tabeller, bøker og regnemidler etter ønske.

I

I laboratoriet brukes gjerne en formel

$$\lambda(\text{Ångstrøm}) = \sqrt{\frac{A}{V(\text{volt})}}$$

for elektroners de Broglie-bølgelengde. Her er A en konstant og V er det spenningsfall som elektronene er akselererte i. Beregn konstanten.

Oppgitt:

Plancks konstant: $h = 6.623\cdot 10^{-34}$ Joule·sek.

Elektronets masse: $m = 9.106\cdot 10^{-31}$ kg.

" ladning: $e = 1.60\cdot 10^{-19}$ Coulomb

1 Ångstrøm = 10^{-10} meter

Det regnes ikke-relativistisk ($p=mv$).

For dem som måtte foretrekke å regne i det Gauss'ke CGS system oppgis

1 volt = (1/300) CGS

$e = 4.8\cdot 10^{-10}$ "

II

a) Begynnelsestilstanden for en partikkel antas gitt som

$$\Psi(x,0) = (2\pi\Delta x^2)^{-\frac{1}{4}}\, e^{-\frac{x^2}{4\Delta x^2}} \qquad x \subset [-\infty\ ,\ \infty]$$

Hva er da sannsynlighetsfordelingen $(w(p))$ og variansen (Δp^2) av partiklens impuls ?

b) Hvis partiklen ikke påvirkes av krefter, hva blir da sannsynlighetsfordelingen $(w(x))$ av stedet (x) og variansen $(\Delta x^2(t))$ ved et senere tidspunkt (t) ?

c) Istedet for begynnelsestilstanden a) ønskes det én som gir forventningsverdiene

$$\langle x\rangle = x_0 \text{ og } \langle p\rangle = p_0$$

Skriv opp ~~den~~ en slik.

d) Hva blir da $w(p)$ og $w(x)$?

e) Δp^2 endrer seg ikke med tiden for en fri partikkel $(\mathcal{H} = p^2/2m)$. Gi en begrunnelse for det.

f) Det høres sommetider at "fasen" (δ) i Schrødingerfunksjonen $\Psi = |\psi| \cdot e^{i\delta}$ ikke har noen betydning. Forklar med eksempel hvorfor dette er et misvisende utsagn.

III

I feltfritt rom $(x \subset [-\infty, +\infty])$ er Feynmans propagator

$$K^0(x-\xi;t-\tau)=[2\pi i\hbar(t-\tau)/m]^{-\frac{1}{2}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}$$

a) Utled K^0 av Schrödingerlikningen for en fri partikkel.

b) Selv om partiklen befinner seg i et potensialfelt, $(V(x))$, kan propagatoren over et tilstrekkelig lite tidsinterval $(\Delta t=t-\tau)$ tilnærmes ved hjelp av K^0. For da gjelder følgende:

$$K(x,\xi;\Delta t) = \left[K^0(x,\xi,\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta t^2)\right] e^{-\frac{i}{\hbar} V\,\Delta t}$$

Bruk det til å utlede Schrödingerlikningen

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\Psi$$

<u>Tips</u>:

1° Bestem grenseverdien $\dfrac{\Psi(t+\Delta t)-\Psi(t)}{\Delta t\to 0}$

2° Bemerk at momentene $M_n = \int K^0 d\xi(\xi-x)^n$ er :

$M_0 = 1$, $M_2 = \frac{i\hbar}{m}\Delta t \cdots M_{2n} = \mathcal{O}(\Delta t^n)$, $M_{2n+1} = 0$ og

3° skriv ut $\psi(\xi,t)$ i Taylorrekke omkring punktet $\xi=x$.